



Б.Н. ДЕЛОНЕ • КРАТКИЙ КУРС МАТЕМАТИЧЕСКИХ МАШИН



Б.Н. ДЕЛОНЕ

КРАТКИЙ КУРС
МАТЕМАТИЧЕСКИХ
МАШИН

Б. Н. ДЕЛОНЕ

**КРАТКИЙ КУРС
МАТЕМАТИЧЕСКИХ
МАШИН**

ЧАСТЬ 1

**МАЛЫЕ СЧЁТНЫЕ МАШИНЫ
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ**

*Допущено Министерством высшего
образования СССР в качестве учебного пособия
для государственных университетов*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1952 ЛЕНИНГРАД

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Классификация математических машин	6

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

МАЛЫЕ СЧЕТНЫЕ МАШИНЫ

Глава I. Арифмометр Однера	7
§ 1. Общий вид	7
§ 2. Вычислительная работа на арифмометре	9
§ 3. Барабан Однера	10
§ 4. Счетчик результатов	15
§ 5. Перенос десятков	17
§ 6. Счетчик оборотов	20
§ 7. Гашение счетчиков	21
§ 8. Гашение числа, установленного на барабане Однера	22
Глава II. Счетный автомат с пропорциональным рычагом	23
§ 9. Общий вид	23
§ 10. Принцип действия автомата	26
§ 11. Секция клавиатуры	32
§ 12. Перенос десятков в счетчике результатов	36
§ 13. Вычитание	38
§ 14. Умножение	41
§ 15. Деление	47
§ 16. Счетчик оборотов	52
§ 17. Гашение счетчиков	54

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Глава III. Планиметры	56
§ 18. Основная теорема	56
§ 19. Полярный планиметр	66
§ 20. Конструкция полярного планиметра	71
§ 21. Прецизионный дисковый полярный планиметр	74
§ 22. Общие сведения о прямолинейных планиметрах	79
§ 23. Прецизионный прямолинейный дисково-катковый планиметр	80
§ 24. Сферически-катковый прямолинейный планиметр	82

Глава IV. Обобщённые планиметры	85
§ 25. Общие сведения	85
§ 26. Прибор с зубчатыми колёсами для определения момента первого порядка	86
§ 27. Кулисно-кривошипный прибор для определения момента первого порядка	89
§ 28. Кулисно-кривошипный прибор для определения моментов нулевого, первого и второго порядков	90
Глава V. Интегриметры	94
§ 29. Фрикционный дисковый интегриметр	94
§ 30. Прямолинейный интегриметр	96
Глава VI. Гармонические анализаторы	98
§ 31. Гармонический анализатор Максвелла	99
§ 32. Гармонический анализатор Мадера	100
Глава VII. Интеграфы	105
§ 33. Интеграф с катком	105
§ 34. Интеграф с подвижной чертёжной доской	108
ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ	
МАШИНА ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ АНАЛИЗАТОР)	
Глава VIII. Конструкция машины	111
§ 35. Общие сведения	111
§ 36. Интегратор	113
§ 37. Складывающийся механизм, или сумматор	116
§ 38. Редуктор	117
§ 39. Ведущее устройство	119
§ 40. Функциональное устройство	123
Глава IX. Принцип действия машины	125
§ 41. Обычное и инверсное включение интегратора	125
§ 42. Решение задач на дифференциальном анализаторе	129

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книжка является почти точным воспроизведением курса: «Малые счётные машины и математические приборы», который я уже три раза читал на механико-математическом факультете Московского университета.

В составлении предлагаемого здесь курса мною руководила мысль дать подробное описание конструкции и принципа действия только тех малых счётных машин и математических приборов, которые вошли в широкий обиход и сейчас постоянно применяются на практике. Кроме того, дано описание конструкции и принципа действия дифференциального анализатора. От включения в книжку подготовленных мною глав о счётном автомате со ступенчатыми валиками и о счётном автомате с колесом Однера пришлось отказаться, так как изготовление снимков их деталей задержало бы выход книги.

В настоящую книгу не включено описание больших счётных машин, так как его целесообразно выделить в отдельный курс.

Помощь в первоначальном изготовлении описания малых счётных машин оказали мне бывшие тогда ещё студентами МГУ И. С. Мухин и Е. А. Волков, а затем студент МГУ Р. Д. Бачелис, издательский редактор этой книжки. Р. Д. Бачелис проделал очень большую работу по созданию рисунков для описания арифмометра и счётного автомата с пропорциональным рычагом. Для этого пришлось сделать многочисленные снимки деталей этих машин и досмотреть за правильным изготовлением штриховых рисунков со многих из них. Самые штриховые рисунки с фотографий прекрасно выполнил Б. Ф. Красиков.

Б. Делоне

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

МАЛЫЕ СЧЁТНЫЕ МАШИНЫ

КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МАШИН

Математической машиной называется всякое устройство, основанное на механических, электротехнических или иных принципах, позволяющее решать тот или иной тип математических задач.

А. *Машины дискретного действия*, иначе называемые *счётными машинами* или *цифровыми машинами*.

I. Малые счётные машины (арифмометр, различные полуавтоматы, счётный автомат с пропорциональным рычагом, счётный автомат со ступенчатыми валиками, счётный автомат с колесом Однера и т. д.).

II. Большие счётные машины.

Б. *Машины непрерывного действия*.

I. Малые машины непрерывного действия, или математические приборы (планиметры, обобщённые планиметры, или моментометры, гармонические анализаторы, интегриметры, интеграфы и т. д.).

II. Большие машины непрерывного действия (дифференциальные анализаторы).

ГЛАВА I

АРИФМОМЕТР ОДНЕРА

Арифмометр, после обычных счётов, — самая употребительная из счётных машин. На арифмометре выгодно выполнять главным образом умножение и деление, так как сложение и вычитание выполняются на арифмометре не быстрее, чем на обыкновенных счётах. Умножение же и деление выполняются на арифмометре гораздо быстрее и почти совсем не утомляют вычислителя.

Из различных типов арифмометров наиболее распространён у нас арифмометр «Феликс», который мы сейчас опишем. Он позволяет складывать и вычитать числа, имеющие до 9 десятичных знаков, умножать числа до 9 знаков на числа до 8 знаков (при условии, что произведение содержит не более 13 знаков), делить числа до 13 знаков на числа до 9 знаков (причём в частном можно получать не более 8 знаков).

Арифмометр «Феликс», подобно большинству современных арифмометров, основан на применении так называемых *колёс Однера* — зубчатых колёс с переменным числом зубцов. Такое колесо было изобретено инженером Экспедиции заготовления государственных бумаг В. Т. Однером в 1874 году в Петербурге. До сих пор, более 75 лет, колесо Однера является важнейшей составной частью очень многих, самых распространённых вычислительных машин. Это обстоятельство подчёркивает значение и жизненность изобретения Однера.

§ 1. Общий вид

Арифмометр (рис. 1) состоит из *корпуса (1)* — неподвижной части — и *каретки (2)* — подвижной части. В корпусе помещается *барабан Однера*, служащий для установки исходных чисел.

В каретке помещаются *счётчик результатов, счётчик оборотов и механизм передвижения каретки*. На корпусе укреплена *рукоятка (3), кронштейн (4) и зубчатая планка (5)* для передвижения каретки. Зубчатая планка и механизм передвижения

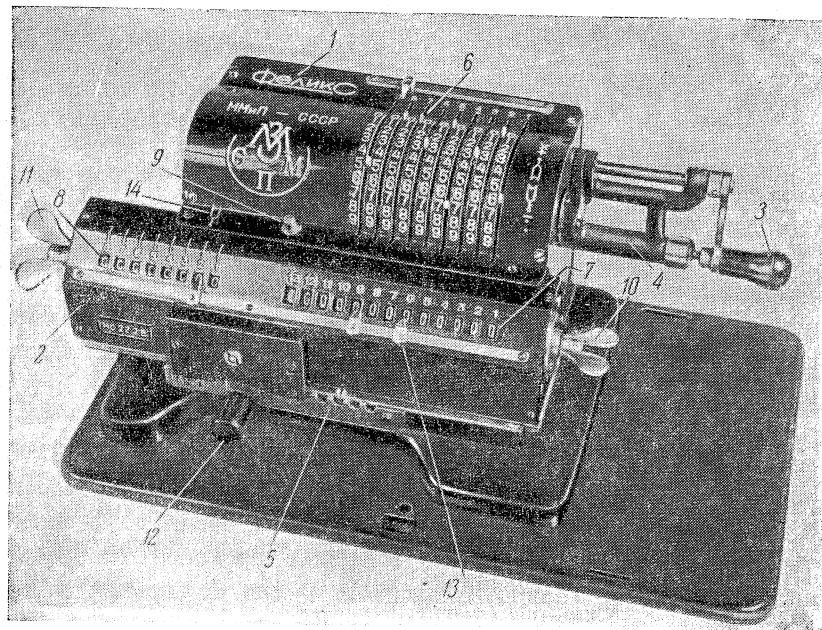


Рис. 1. Арифмометр «Феликс».

1—корпус, 2—каретка, 3—рукоятка, 4—кронштейн, 5—зубчатая планка, 6—установочные рычажки, 7—окошки счётчика результатов, 8—окошки счётчика оборотов, 9—кнопка планки гашения рычажков, 10—гасительный барашек счётчика результатов, 11—гасительный барашек счётчика оборотов, 12—рычаг передвижения каретки, 13—передвижные запятыя, 14—стрелка (указатель разрядов).

каретки могут отсутствовать, и тогда каретка передвигается от руки и удерживается в заданном положении особой защёлкой.

При работе на арифмометре вычислитель использует следующие части: *установочные рычажки (6), рукоятку (3), окошки счётчика результатов (7) и счётчика оборотов (8), кнопку планки гашения рычажков (9), гасительные барашки счётчика результатов (10) и счётчика оборотов (11), рычаг передвижения каретки (12), передвижные запятыя (13), стрелку (14), указывающую, на сколько разрядов смещена каретка.*

§ 2. Вычислительная работа на арифмометре

Гашение счётчиков. Приступая к работе на арифмометре, поворотом гасительных барашков [(10) и (11) на рис. 1] гасят счётчики, т. е. устанавливают на них нули. Счётчик результатов гасят перед каждым вычислением. Счётчик оборотов не используется при сложении и вычитании; поэтому перед сложением и вычитанием его можно не гасить. При умножении счётчик оборотов используется для контроля (на нём устанавливается множитель); поэтому перед умножением его гасят по усмотрению вычислителя. Перед делением счётчик оборотов обязательно гасят.

Сложение. Каретку ставят в крайнее левое положение. Одно слагаемое устанавливают на барабане Однера при помощи установочных рычажков, т. е. каждый установочный рычажок ставится рядом с цифрой соответствующего разряда устанавливаемого числа. Одним оборотом рукоятки по часовой стрелке¹⁾ установленное число передаётся в счётчик результатов. Затем на барабане Однера устанавливают второе слагаемое и производят второй оборот рукоятки по часовой стрелке. В счётчике результатов устанавливается сумма.

Вычитание. Каретку ставят в крайнее левое положение. Уменьшаемое устанавливают на барабане Однера и производят оборот рукоятки по часовой стрелке. Затем устанавливают вычитаемое и производят оборот рукоятки против часовой стрелки. В счётчике результатов устанавливается разность.

Если уменьшаемое меньше вычитаемого, то разность будет отрицательной. Абсолютную величину разности можно прочесть на счётчике результатов, заменив каждую цифру её дополнением до 9 и прибавив к полученному числу единицу. При вычитании большего числа из меньшего раздаётся звонок.

Умножение. Один из сомножителей, который мы назовём *множимым* (рациональнее брать больший), устанавливают на барабане Однера. Каретку ставят в крайнее левое положение, после чего рукоятку поворачивают по часовой стрелке столько раз, какова цифра в разряде единиц множителя. Затем

¹⁾ Если смотреть со стороны рукоятки. В дальнейшем выражения «по...» или «против часовой стрелки» в главе I следует понимать в указанном смысле.

каретку передвигают на один разряд вправо и рукоятку вращают в том же направлении столько раз, какова цифра в разряде десятков и т. д. В счётчике результатов устанавливается произведение, а в счётчике оборотов — множитель.

Эта схема полностью воспроизводит умножение обычным письменным способом. Можно начинать умножение и со старшего разряда множителя.

На арифмометре можно получать алгебраическую сумму нескольких произведений. Для этого каждое произведение вычисляют на арифмометре описанным способом, но при этом счётчик результатов не гасят после проведения умножения: если произведение входит в алгебраическую сумму со знаком «минус», то рукоятку вращают против часовой стрелки.

Деление. Деление производят также аналогично тому, как оно обычно выполняется в арифметике, т. е. методом последовательных вычитаний. В счётчике оборотов устанавливается частное, в счётчике результатов — остаток.

§ 3. Барабан Однера

Барабан Однера (рис. 2) состоит из девяти *основных* (1) и четырёх *дополнительных* (2) колёс Однера, неподвижно насаженных на общую ось, которая при помощи зубчаток связана с рукояткой.

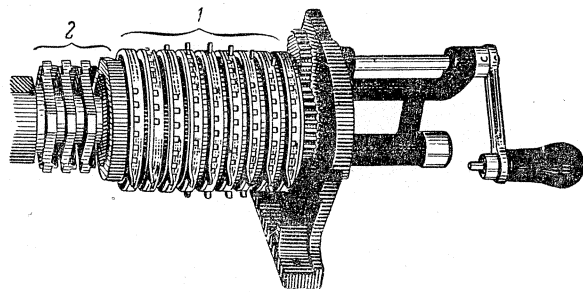


Рис. 2. Барабан Однера.

1—основные колёса Однера, 2—дополнительные колёса Однера.

Рассмотрим устройство основного колеса Однера (рис. 3, а). Толстый диск [(1) на рис. 3, а; отдельно изображён на рис. 3, б] имеет радиальные пазы (2), в которых скользят девять выдвигаю-

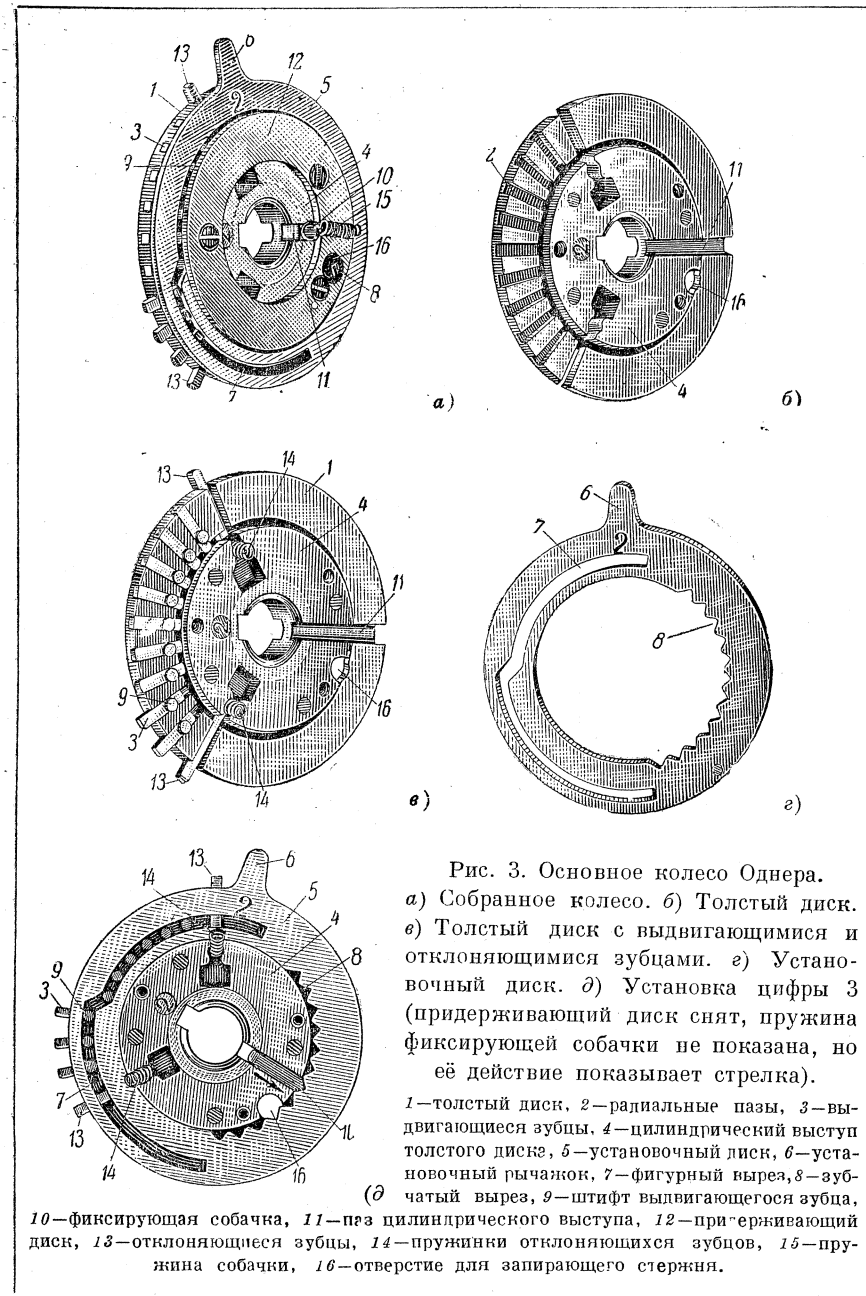


Рис. 3. Основное колесо Однера.

а) Собранное колесо. б) Толстый диск. в) Толстый диск с выдвигающимися и отклоняющимися зубьями. г) Установочный диск. д) Установка цифры 3 (придерживающий диск снят, пружина фиксирующей собачки не показана, но её действие показывает стрелка).

1—толстый диск, 2—радиальные пазы, 3—выдвигающиеся зубья, 4—цилиндрический выступ толстого диска, 5—установочный диск, 6—установочный рычажок, 7—фигурный вырез, 8—зубчатый вырез, 9—штифт выдвигающегося зубца,

10—фиксирующая собачка, 11—паз цилиндрического выступа, 12—придерживающий диск, 13—отклоняющиеся зубья, 14—пружинки отклоняющихся зубцов, 15—пружина собачки, 16—отверстие для запирающего стержня.

щихся зубцов (3) (рис. 3, в). На цилиндрическом выступе (4) толстого диска, как на оси, может вращаться тонкий кольцеобразный установочный диск (5) (рис. 3, а). Последний (отдельно изображён на рис. 3, г) имеет установочный рычажок (6), фигурный вырез (7) и зубчатый вырез (8). Каждый выдвигающийся зубец имеет штифт (9) (рис. 3, в), входящий в фигурный вырез установочного диска. В одно из углублений зубчатого выреза входит фиксирующая собачка (10), которая может передвигаться в пазу (11) цилиндрического выступа толстого диска (рис. 3, а и в). Чтобы установочный диск не соскальзывал с толстого диска, к последнему прикреплен тонкий придерживающий диск (12) (рис. 3, а).

Кроме выдвигающихся зубцов, толстый диск имеет два отклоняющихся зубца (13) (рис. 3, а, в, в). Каждый отклоняющийся зубец может отклоняться на несколько миллиметров в направлении, параллельном оси барабана Однера. При этом отклоняющийся зубец может находиться в одной плоскости с выдвигающимися зубцами или же вне этой плоскости. В обычном своём нерабочем положении отклоняющийся зубец удерживается пружинкой (14) вне плоскости выдвигающихся зубцов (рис. 3, в).

Все основные колёса Однера отличаются друг от друга только положением отклоняющихся зубцов¹⁾. Крайнее правое основное колесо не имеет отклоняющихся зубцов.

Дополнительные колёса представляют собой толстые диски²⁾, имеющие только отклоняющиеся зубцы (такие же, как у основных колёс).

Рассмотрим, что происходит при установке какого-либо числа на барабане Однера. Цифра каждого разряда устанавливается на соответствующем основном колесе. Когда вычислитель ставит установочный рычажок рядом с нужной цифрой, поворачивается установочный диск. Фигурный вырез установочного диска состоит из двух дуг окружностей неравных радиусов, причём их центры совпадают с центром вращения установочного диска; концы дуг соединены ступенью наклонным прямолинейным участком (рис. 3, г). При повороте установочного диска штифты одних зубцов попадают

¹⁾ Поэтому при массовом производстве каждое колесо нумеруется для облегчения сборки; колесо на рис. 3 имеет номер 2.

²⁾ Для облегчения три левых дополнительных колеса сделаны в форме секторов (см. рис. 2).

в дугу большого радиуса, других — в дугу меньшего радиуса (рис. 3, в). Первые зубцы оказываются выдвинутыми, и их число равно цифре, рядом с которой поставлен установочный рычажок.

Для того чтобы вычислитель не мог поставить установочный диск в положение, при котором какой-нибудь зубец выдвинут не до конца, служит фиксирующая собачка (10) с пружинкой (15), входящая в то или иное из углублений зубчатого выреза (рис. 3, в).

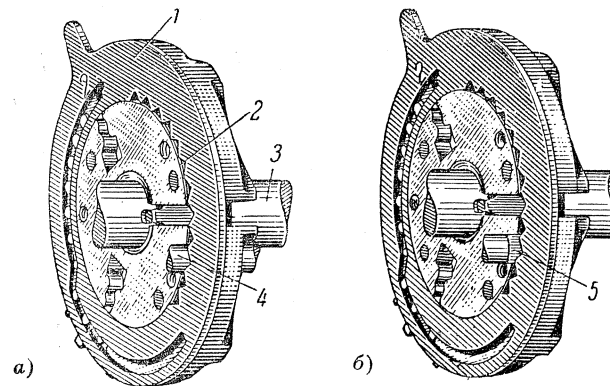


Рис. 4. Действие запирающего стержня.

а) Правое положение стержня. б) Левое положение стержня.

1—установочный диск, 2—зубчатый вырез, 3—ось барабана Однера, 4—запирающий стержень, 5—вырез запирающего стержня. Придерживающий диск на рисунке не показан.

Но фиксирующая собачка слишком слаба для того, чтобы удерживать установочный диск в заданном положении во время работы арифмометра в случае, если вычислитель нечаянно заденет за установочный рычажок. Это делает запирающий стержень (рис. 4). Он проходит сквозь все основные колёса барабана Однера параллельно оси, для чего во всех основных колёсах просверлены отверстия (16) (см. рис. 3, а), и вращается вокруг оси вместе с барабаном. Запирающий стержень имеет девять вырезов (по числу основных колёс Однера). Если стержень (4) находится в правом положении (рис. 4, а), то между зубцами зубчатых вырезов (2) попадают ненадрезанные участки стержня, и установочные диски (1) нельзя поворачивать относительно барабана Однера. Если же стержень находится в левом положении, то установочные диски можно поворачивать, так как зубцы зубчатых вырезов проходят через вырезы стержня (5) (рис. 4, б).

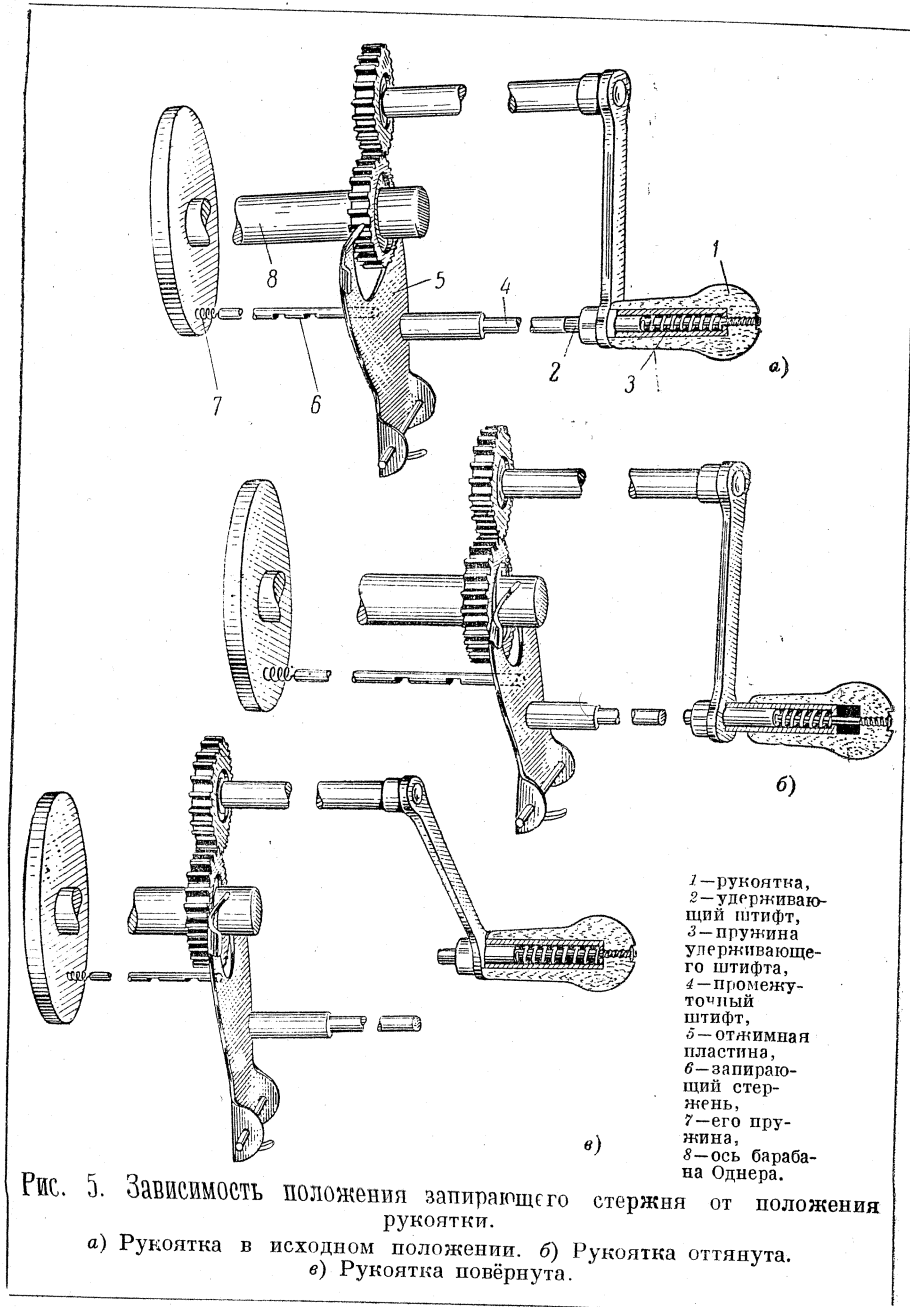


Рис. 5. Зависимость положения запирающего стержня от положения рукоятки.

а) Рукоятка в исходном положении. б) Рукоятка оттянута. в) Рукоятка повернута.

Положение запирающего стержня зависит от положения *удерживающего штифта* рукоятки. В исходном положении рукоятки (1) (рис. 5, а) удерживающий штифт (2) под действием своей довольно сильной пружины (3), через *промежуточный штифт* (4), действующий на *отжимную пластину* (5), нажимает на запирающий стержень (6), преодолевает действие более слабой пружины (7) запирающего стержня и удерживает его в левом положении.

Если рукоятка оттянута, т. е. удерживающий штифт не давит на промежуточный (рис. 5, б), или рукоятка повернута на некоторый угол (рис. 5, в), и поэтому удерживающий штифт тоже не давит на промежуточный, то запирающий стержень под действием своей пружины смещается вправо.

Таким образом, менять число выдвинутых зубцов возможно только при исходном положении рукоятки, а также в случае, о котором будет сказано в § 8.

§ 4. Счётчик результатов

Счётчик результатов (рис. 6) состоит из 13 *цифровых колёс* (1), 13 *промежуточных зубчаток* (2), *десятичников* (3), *фиксирующих*

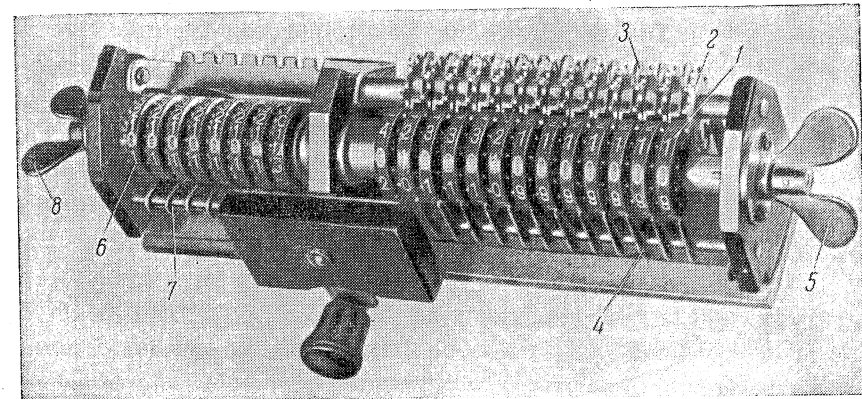


Рис. 6. Каретка со счётчиками.

Справа — счётчик результатов. 1 — цифровые колёса, 2 — промежуточные зубчатки, 3 — десятичники, 4 — фиксирующие собачки, 5 — гасительный барашек. Слева — счётчик оборотов. 6 — цифровые колёса, 7 — фиксирующие собачки, 8 — гасительный барашек.

собачек (4) и гасительного механизма. [На рис. 6 виден только его барашек (5)].

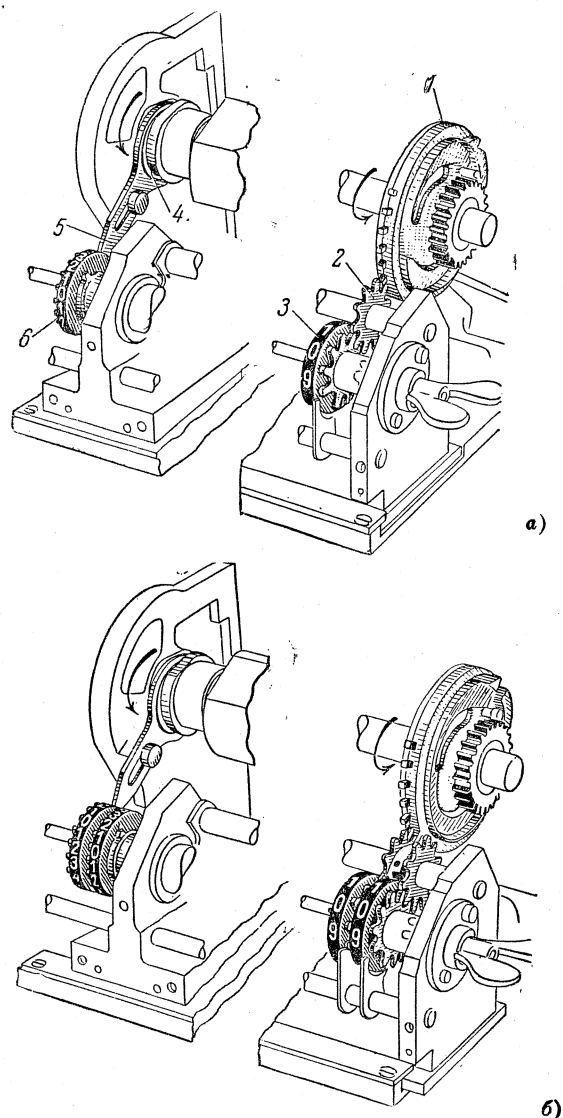


Рис. 7. Работа счётчиков.

а) Каретка находится в крайнем левом положении.

б) Каретка сдвинута на один разряд вправо.

1—основное колесо Однера, 2—промежуточная зубчатка, 3—цифровое колесо счётчика результатов, 4—эксцентрик, 5—толкатель, 6—цифровое колесо счётчика оборотов.

Цифровое колесо счётчика результатов (оно изображено ниже на рис. 8) состоит из барабана с десятью цифрами (от 0 до 9) и жёстко скреплённых с ним слева *однозубого колеса* и справа *зубчатого колеса* с десятью зубцами. С последним постоянно зацеплена промежуточная зубчатка. Фиксирующая собачка позволяет цифровому колесу поворачиваться только на целое число зубцов.

Передача цифры, установленной на основном колесе Однера, происходит при одном обороте рукоятки по часовой стрелке. При этом (рис. 7) основное колесо Однера (1) поворачивает находящуюся против него промежуточную зубчатку (2), а тем самым и цифровое колесо (3) на столько зубцов, сколько их выдвинуто на основном колесе Однера. При одном обороте рукоятки против часовой стрелки цифровое колесо поворачивается на столько же зубцов в обратном направлении. Цифры на барабане цифрового колеса расположены так, что при вращении рукоятки по часовой стрелке к цифре, стоящей в окошечке счётчика, прибавляется цифра, установленная на основном колесе Однера, а при вращении против часовой стрелки — вычитается.

Если каретка находится в крайнем левом положении (рис. 7, а), то основное колесо Однера каждого разряда поворачивает цифровое колесо того же разряда. Если же каретка сдвинута на n разрядов вправо (на рис. 7, б — на один разряд), то основное колесо Однера m -го разряда поворачивает цифровое колесо $m + n$ -го разряда. Следовательно, передвижение каретки на n разрядов вправо равносильно приписыванию n нулей справа к установленному на барабане Однера числу.

§ 5. Перенос десятков

В счётчике результатов при сложении происходит автоматический перенос десятка, накопившегося в данном разряде, в виде прибавления $+1$ в соседнем старшем разряде, а при вычитании — заимание десятка в данный разряд в виде прибавления -1 в соседнем старшем разряде¹⁾.

Для этого служат отклоняющиеся зубцы колёс Однера. Один из отклоняющихся зубцов каждого колеса работает при сложении,

¹⁾ Об умножении и делении особо говорить не будем, так как эти действия сводятся к сложению и вычитанию.

другой — при вычитании. В нерабочем положении они расположены вне плоскости выдвигающихся зубцов и при вращении колёс Однера не зацепляют промежуточных зубчаток.

При накоплении на цифровом колесе десятка (это бывает при сложении) или при вычитании из меньшей цифры большей цифровое колесо (1) (рис. 8) рассматриваемого разряда счётчика результатов проходит соответственно через положение в окошечке 9—0 или

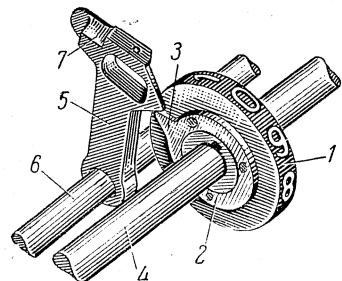


Рис. 8. Накопление десятка на цифровом колесе.

1—цифровое колесо, 2—однозубое колесо, 3—выступ однозубого колеса, 4—ось цифровых колёс, 5—десяточник, 6—ось десяточников, 7—скос десяточника для сложения.

0—9, и однозубое колесо (2) своим выступом (3) отодвигает десяточник (5), имеющий форму молоточка, и передвигает его из переднего положения в заднее. Особый фиксатор не позволяет десяточнику останавливаться в других положениях, кроме этих двух. Десяточник имеет два скоса — один для сложения (7), другой для вычитания (на рис. 8 не виден).

Когда десяточник стоит в заднем положении, его скосы устанавливаются на пути отклоняющихся зубцов колеса Однера соседнего старшего разряда (4) (рис. 9). Один из отклоняющихся зубцов этого колеса (какой именно — зависит от того, происходит сложение или вычитание) встречается с соответствующим скосом десяточника (2) и отклоняется в плоскость промежуточной зубчатки (6) разряда, соответствующего этому колесу Однера. При дальнейшем вращении барабана Однера отклоняющийся зубец поворачивает эту промежуточную зубчатку, а тем самым и цифровое колесо (7) этого соседнего старшего разряда на один зубец. Затем отклоняющийся зубец, соскользнув со скоса десяточника, под действием своей пружины выходит из плоскости промежуточной зубчатки. Наконец, десяточник возвращается в своё переднее нерабочее положение под действием специального утолщения (8) колеса Однера.

Десяточник старшего разряда счётчика результатов соединён с молоточком звонка, и при прохождении цифрового колеса старшего разряда через положение 9—0 или 0—9 раздаётся звонок. Как легко видеть, цифровое колесо старшего разряда проходит через положение 9—0 при сложении, когда сумма оказывается

состоящей более чем из 13 знаков; через положение 0—9 оно проходит при вычитании, когда разность оказывается отрицательной.

В § 3 было указано, что барабан Однера состоит из девяти основных и четырёх дополнительных колёс Однера и что последние имеют только отклоняющиеся зубцы. Роль дополнительных колёс следующая: они служат для переноса десятков в те разряды счётчика результатов, которые не находятся под действием девяти основных колёс Однера. Например, при сложении нескольких девятизначных чисел сумма может оказаться десяти-, одиннадцатизначной и т. д.

Отклоняющиеся зубцы, работающие при сложении, расположены на барабане Однера по правой винтовой линии, а работающие при вычитании — по левой (см. рис. 2 на стр. 10).

Остановимся на том, почему приходится устраивать специальные приспособления, которые сначала готовят десятичный перенос, а затем осуществляют его, и на том, почему отклоняющиеся зубцы расположены по винтовым линиям.

Передачу накопившегося десятка в виде прибавления единицы в соседний старший разряд нельзя производить в момент накопления десятка в предыдущем разряде, так как в этот момент в соседнем старшем разряде процесс сложения может ещё не быть окончен (аналогично — при вычитании). По этой причине надо иметь приспособления, которые производили бы передачу десятков лишь после того, как сложение произойдёт во всех разрядах. Такими приспособлениями и являются десяточники.

Для объяснения того, почему отклоняющиеся зубцы расположены по винтовым линиям, рассмотрим сложение двух многозначных чисел. В каком случае из данного разряда придётся пере-

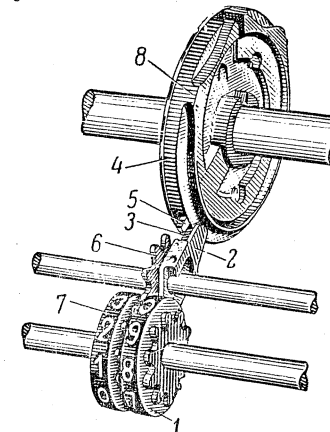


Рис. 9. Перенос десятка при сложении.

1—цифровое колесо, на котором накопился десяток, 2—десяточник, 3—скос десяточника для сложения, 4—колесо Однера соседнего старшего разряда, 5 — отклоняющийся зубец, работающий при сложении, 6—промежуточная зубчатка соседнего старшего разряда, 7 цифровое колесо того же разряда, 8—утолщение колеса Однера для возвращения десяточника в переднее положение.

носить десятков в виде единицы в соседний старший разряд? Если сумма цифр данного разряда складываемых чисел меньше 9, то переносить десятков в старший разряд, безусловно, не придётся. Если сумма этих цифр больше 9, то переносить десятков в старший разряд, безусловно, придётся. Если же сумма этих цифр равна 9, то всё зависит от того, придётся ли переносить десятков из соседнего младшего разряда в данный. Поэтому передачу десятков нужно производить постепенно, начиная с младшего разряда, что и достигается правым винтовым расположением отклоняющихся зубцов сложения.

При вычитании всё происходит аналогично, но барабан вращается в противоположном направлении, и поэтому отклоняющиеся зубцы вычитания расположены по левой винтовой линии.

§ 6. Счётчик оборотов

Счётчик оборотов (см. рис. 6 на стр. 15) состоит из восьми цифровых колёс (6) с восемнадцатью зубцами и восемнадцатью цифрами 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 на каждом, фиксирующих собачек (7) и гасительного механизма [на рис. 6 виден только его барашек (8)].

Восемнадцать цифр на цифровом колесе нужны для подсчёта как положительных оборотов (т. е. оборотов, при которых происходит сложение), так и отрицательных. Цифры 0 и 9 для тех и других оборотов общие. Остальные цифры нанесены по два раза: белые цифры для положительных оборотов и красные для отрицательных.

На одну ось с барабаном Однера (рис. 7 на стр. 16) насажен эксцентрик (4), который приводит в движение толкатель (5). При каждом обороте барабана Однера толкатель своим остриём поворачивает находящееся против него цифровое колесо счётчика оборотов (6) на один зубец. При положительных и отрицательных оборотах барабана Однера толкатель поворачивает цифровое колесо в противоположных направлениях.

Как легко видеть, один оборот барабана Однера при каретке, смещённой вправо на n разрядов, равносильен 10^n оборотам барабана Однера при левом положении каретки. Иначе говоря, в счётчике результатов будут одни и те же показания. Поэтому

толкатель при смещённой каретке действует на цифровое колесо $(n + 1)$ -го разряда счётчика оборотов (см. рис. 7, б).

Счётчик оборотов имеет восемь разрядов. На корпусе арифмометра есть стрелка, которая указывает, на сколько разрядов смещена каретка.

§ 7. Гашение счётчиков

Гашение счётчика результатов производится одним оборотом правого гасительного барашка. Цифровое колесо внутри полое.

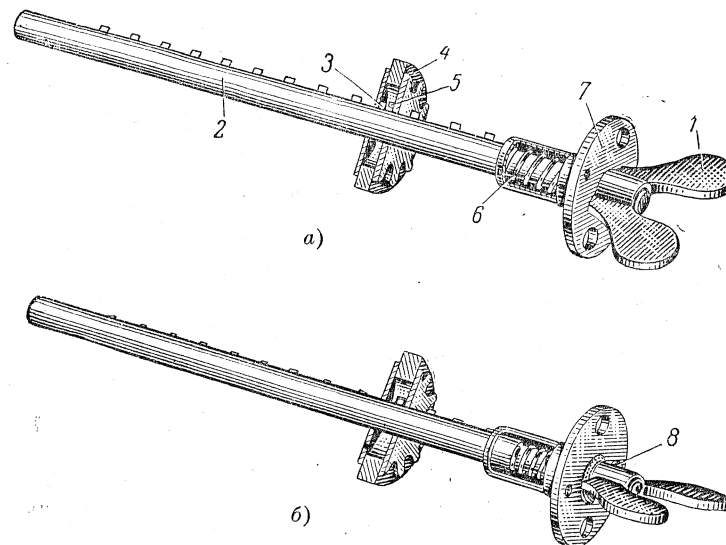


Рис. 10. Гасительный механизм счётчика результатов.
а) Холостое положение. б) Рабочее положение.

1—гасительный барашек, 2—ось цифровых колёс, 3—выступ оси, 4—цифровое колесо, 5—штифт цифрового колеса, 6—пружина для возвращения оси в левое положение, 7—штулка барашка, 8—винтовой срез штулки барашка.

При нормальном положении барашка (1) ось (2) цифровых колёс с имеющимися на ней выступами (3) находится в левом положении (рис. 10, а). Цифровое колесо (4) может вращаться, не задевая штифтом (5), укрепленным на его внутренней стенке, выступа на оси.

При вращении барашка (1) ось (2) вращается, и под действием винтового среза (8) штулки (7) барашка смещается вправо (рис. 10, б); так как ось вращается, её выступ (3) наталкивается

на штифт (5) (если на колесе установлена цифра, отличная от нуля), и цифровое колесо (4) вращается до тех пор, пока гасительный барашек не совершит полного оборота. При этом ось под действием пружины (6) возвращается в левое положение, и сцепление выступа оси со штифтом прекращается. В окошечке счётчика результатов появляется цифра 0.

Гасительный механизм счётчика оборотов приводится в действие левым барашком и работает совершенно аналогично.

§ 8. Гашение числа, установленного на барабане Однера

Гашение отдельных установленных цифр производится поворотом установочных рычажков в нулевое положение. Гашение всех

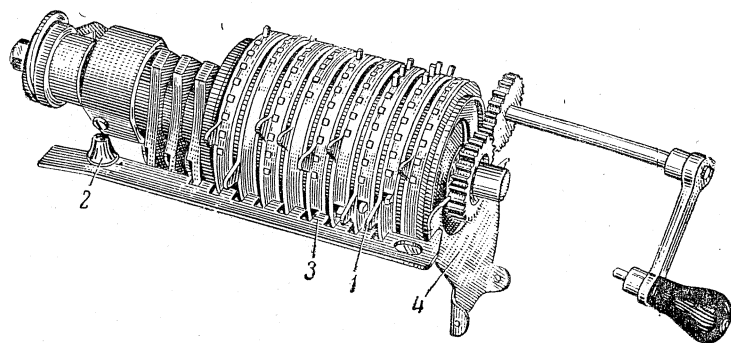


Рис. 11. Действие планки гашения рычажков.

1 — установочные рычажки, 2 — кнопка планки, 3 — выступы планки, 4 — отжимная пластина.

установленных цифр удобнее производить, используя *планку гашения рычажков* (рис. 11). Для этого нужно сместить влево *кнопку* (2) планки гашения рычажков и повернуть рукоятку на четверть оборота по часовой стрелке. При этом установочные рычажки (1), встречаясь с *выступами* планки (3), возвращаются в нулевое положение. Возможность перемещения установочных рычажков (т. е. поворота установочных дисков) при повернутой рукоятке достигается тем, что планка гашения рычажков оттягивает отжимную пластину (4) влево, которая в свою очередь перемещает влево запирающий стержень.

ГЛАВА II

СЧЁТНЫЙ АВТОМАТ С ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ РЫЧАГОМ

Эта весьма совершенная вычислительная машина выполняет с большой скоростью сложение, вычитание, умножение и деление. Все действия производятся автоматически с помощью электрического мотора, питаемого от осветительной сети. Роль вычислителя сводится только к установке исходных данных на клавиатуре и нажатию кнопок, управляющих теми или иными действиями.

Счётный автомат используют при массовых вычислительных работах.

§ 9. Общий вид

Мы рассмотрим автомат «*Мерседес-Эвклид*» (рис. 12, а), модель 37 MS. Её клавиатура имеет 12 разрядов. Другие модели счётных автоматов с пропорциональным рычагом отличаются от рассматриваемой лишь количеством разрядов клавиатуры и другими не принципиальными изменениями. На рис. 12, б для сравнения показана модель 38 того же автомата. Её клавиатура имеет 16 разрядов.

Счётный автомат с пропорциональным рычагом состоит из *корпуса* (1) — неподвижной части и *каретки* (2) — подвижной части.

На корпусе расположены *кнопки управления* и *клавиатура* для установки чисел (3). Внутри автомата (рис. 13) находится *пропорциональный рычаг* (1), *зубчатые рейки* (2), *квадратные оси* (3) с установочными *зубчатками* (4), *промежуточный вал* (5), *основной, или десятичный вал* (6), *кулачковый вал* (7), *мультипликатор* (8) и другие детали. К корпусу прикреплен мотор, приводящий автомат в действие. Каретка имеет (рис. 12) *счётчик результатов* (4), *счётчик оборотов* (5), *запоминающую шкалу* (6), *множительное устройство* (мультипликатор) и другие детали.

При работе на счётном автомате вычислитель использует следующие части машины: клавиатуру (3) для установки чисел [она состоит из 12 (в модели 38—из 16) секций; каждая секция состоит

из девяти клавиш $\boxed{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}$ и служит для установки цифры одного

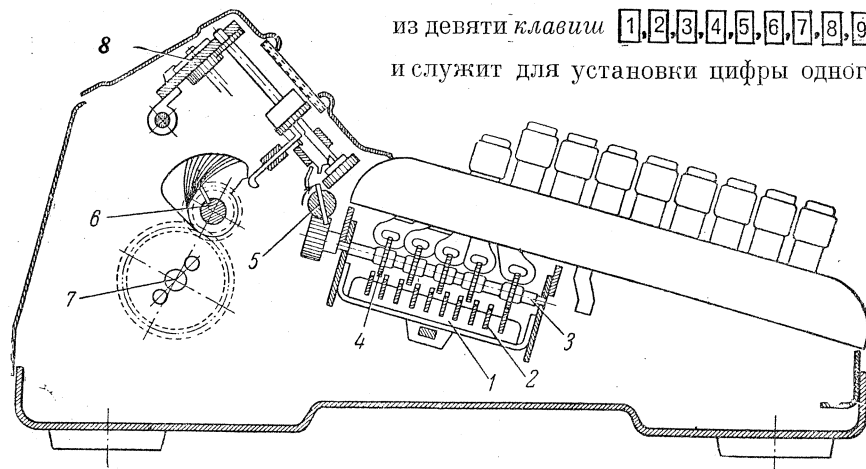


Рис. 13. Вид автомата сбоку.

1—пропорциональный рычаг, 2—зубчатые рейки, 3—квадратные оси, 4—установочные зубчатки, 5—промежуточный вал, 6—основной, или десятичный вал, 7—кулачковый вал, 8—мультипликатор.

разряда числа—самая правая секция для установки единиц, следующая влево для установки десятков и т. д.], окошки счётчика результатов (4), окошки счётчика оборотов (5), окошки запоминающей шкалы (6), кнопку сложения (7), кнопку вычитания (8), рычаг закрепления установленных клавиш (9), кнопку умножения (10), кнопку деления (11), рычаг прерывания деления (12), корректирующую кнопку счётчика оборотов (13), рычаг получения сумм и разностей произведений и частных (14), рычаг умножения чисел больше шести¹⁾ знаков (15), кнопку гашения счётчика результатов (16), кнопку гашения счётчика оборотов (17), кнопку гашения клавиатуры (18), кнопку мультипликатора (19), рычаг сохранения показаний счётчика оборотов (20), кнопку перевода числа из счётчика результатов в запоминающую шкалу (21), кнопку обратного перевода (22), шкалу указателей разрядов (23), рычаг заслонки счётчика результатов (24).

¹⁾ В модели 38 ему соответствует рычаг умножения чисел больше восьми знаков.

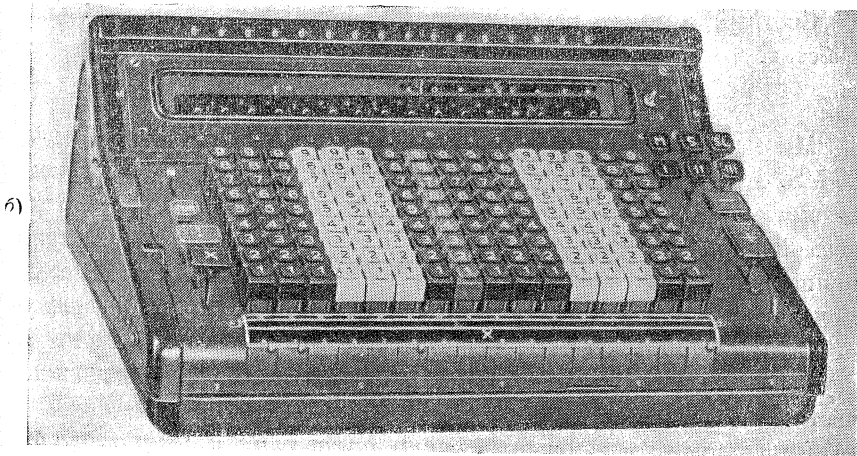
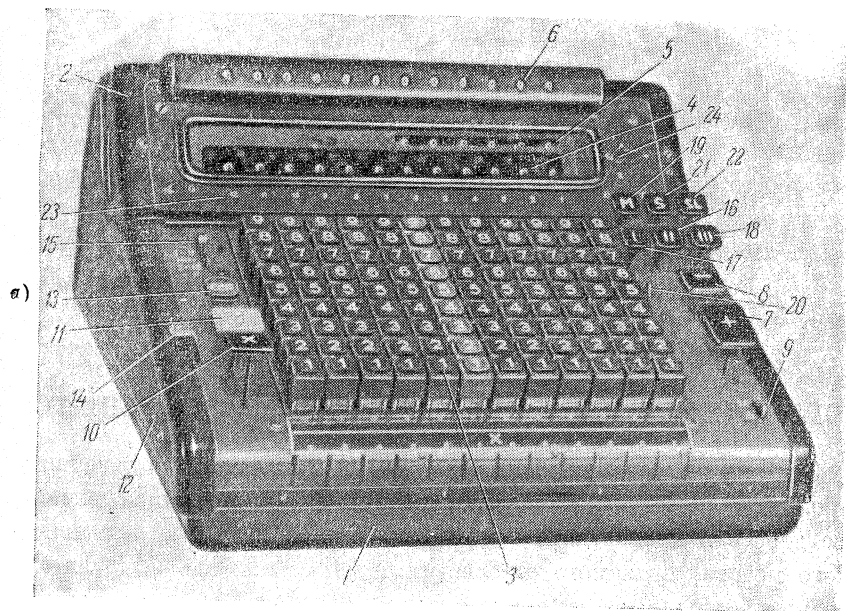


Рис. 12. Счётный автомат с пропорциональным рычагом «Мерседес-Эвклид».

а) Модель 37 MS. б) Модель 38 MS.

1—корпус, 2—наретка, 3—клавиатура, 4—счётчик результатов, 5—счётчик оборотов, 6—запоминающая шкала, 7—кнопка сложения, 8—кнопка вычитания, 9—рычаг закрепления установленных клавиш, 10—кнопка умножения, 11—кнопка деления, 12—рычаг прерывания деления, 13—корректирующая кнопка счётчика оборотов, 14—рычаг получения сумм и разностей произведений и частных, 15—рычаг умножения чисел больше шести (в модели 38—восемь) знаков, 16—кнопка гашения счётчика результатов, 17—кнопка гашения счётчика оборотов, 18—кнопка гашения клавиатуры, 19—кнопка мультипликатора, 20—рычаг сохранения показаний счётчика оборотов, 21—кнопка перевода числа из счётчика оборотов в запоминающую шкалу, 22—кнопка обратного перевода, 23—шкала указателей разрядов, 24—рычаг заслонки счётчика результатов.

Замечание. Сторону машины, обращённую к вычислителю, работающему на этой машине, мы будем называть передней, а противоположную сторону—задней. Находящуюся при этом по правую руку боковую сторону мы будем называть правой, а находящуюся по левую руку—левой стороной машины. В главе II мы будем всюду строго придерживаться этой терминологии.

§ 10. Принцип действия автомата

В корпусе автомата находится десять *основных зубчатых реек* (1), идущих слева направо параллельно друг другу (рис. 14). Рейки

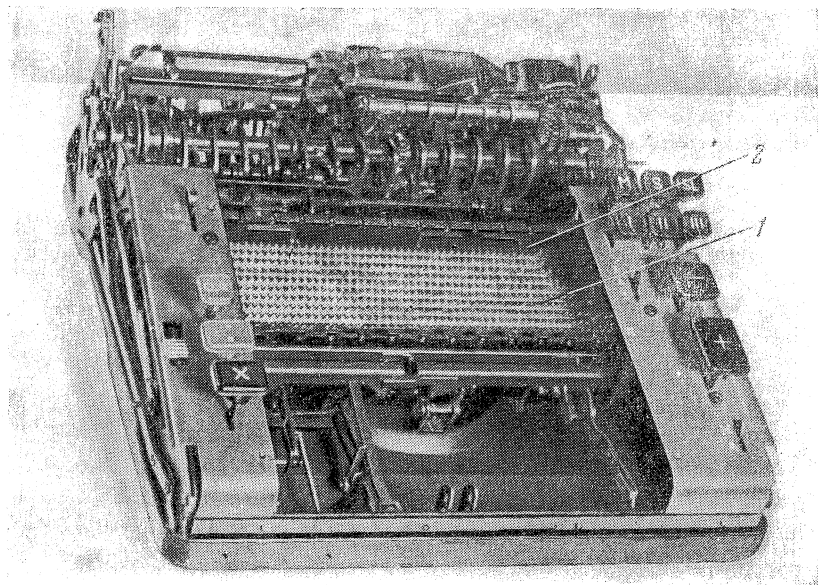


Рис. 14. Зубчатые рейки.
1—основные рейки, 2—дополнительная рейка.

вставлены в вырезы четырёх *пластин* (1) (рис. 15) и могут передвигаться слева направо и обратно. Каждая рейка сверху имеет зубцы, а снизу—цилиндрический палец (на рисунке не виден), входящий в вырез (2) *пропорционального рычага* (3). Снизу пропорциональный рычаг (1) (рис. 16) имеет шип (2), с помощью которого середина пропорционального рычага передвигается *што-*

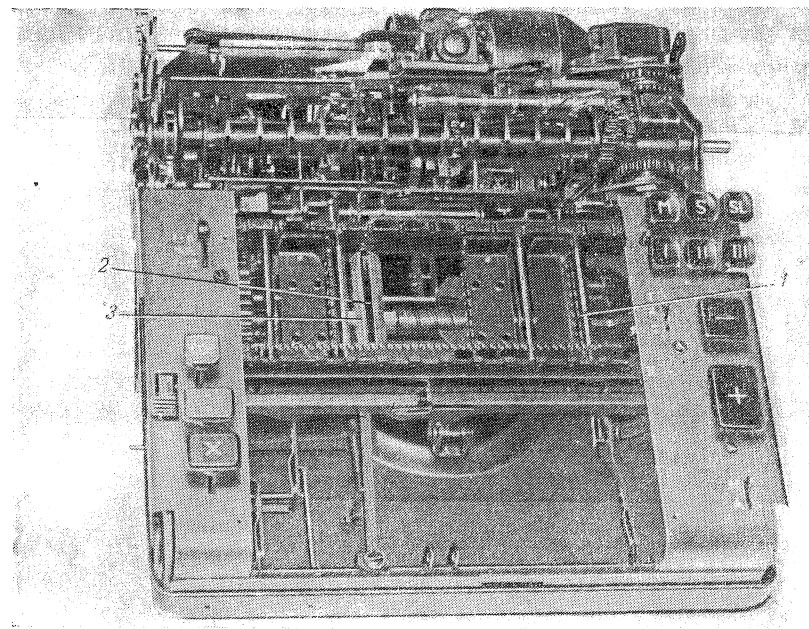


Рис. 15. Пропорциональный рычаг и другие детали.
1—пластины, 2—вырез пропорционального рычага, 3—пропорциональный рычаг.

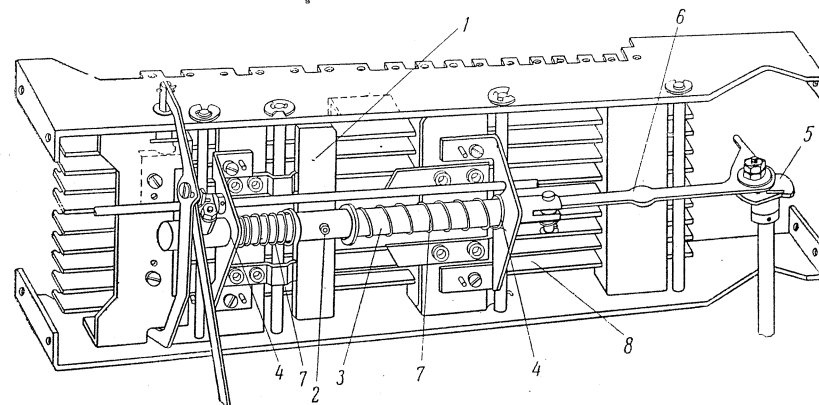


Рис. 16. Вид автомата снизу.
1—пропорциональный рычаг, 2—его шип, 3—шток, 4—сальники, 5—кривошип, 6—шатуны, 7—пружины, 8—зубчатые рейки.

ком (3) слева направо и обратно. Шток ходит в *сальниках* (4) под действием *кривошипа* (5), вращаемого мотором, и *шатуна* (6).

Для большей беззвучности и плавности работы на шток надеты две спиральные пружины (7).

Назовём заднюю рейку (рис. 14) нулевой, следующую—первой и т. д. Если закрепить нулевую рейку, то пропор-

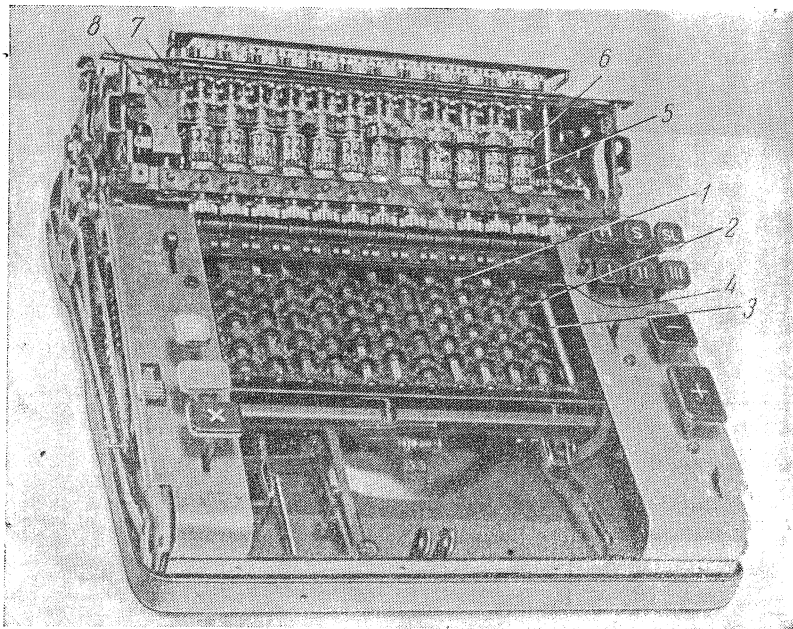


Рис. 17. Круглая и квадратные оси и детали каретки.

1—квадратные оси, 2—установочные зубчатки, 3—круглая ось, 4—девятизубчатка, 5—цифровые колёса счётчика результатов, 6—цифровые колёса счётчика оборотов, 7—соединяющие колёса, 8—рычаг деления.

циональный рычаг будет качаться вокруг её пальца. При передвижении пропорционального рычага от крайнего левого до крайнего правого положения нулевая рейка останется неподвижной, первая—отклонится на один зубец и т. д. до девятой (передней) рейки, которая отклонится на девять зубцов. Над рейками перпендикулярно к ним расположены *квадратные оси* (1) (рис. 17). Каждая квадратная ось соответствует одному разряду устанавливаемого числа: правая—разряду единиц, следующая—разряду десятков и т. д. На каждую квадратную ось насажено пять *установочных зубчаток* (2), имеющих по десять зубцов. При этом в нейтральном

положении задняя зубчатка I¹⁾ зацеплена с нулевой рейкой. Следующая зубчатка II расположена между второй и третьей рейками, зубчатка III—между четвертой и пятой, зубчатка IV—между шестой и седьмой и зубчатка V—между восьмой и девятой рейками. Зубчатки I, II, III, IV, V обслуживают соответственно ну-

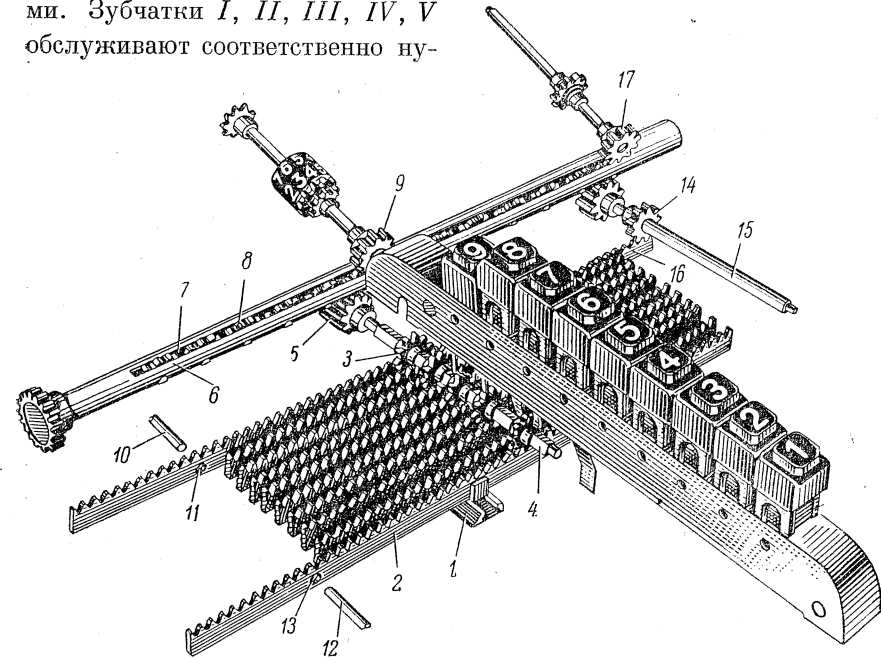


Рис. 18. Принцип действия автомата.

1—пропорциональный рычаг, 2—основные рейки, 3—установочные зубчатки, 4—квадратные оси, 5—передающие зубчатки, 6—промежуточный вал, 7—его прорез, 8—промежуточные зубчатки, 9—воспринимающие зубчатки, 10—штифт для закрепления нулевой рейки, 11—отверстие нулевой рейки, 12—штифт для закрепления девятой рейки, 13—отверстие девятой рейки, 14—девятизубчатка, 15—круглая ось, 16—дополнительная рейка, 17—воспринимающая зубчатка «нулевого» разряда счётчика результатов.

левую и первую, вторую и третью, четвертую и пятую, шестую и седьмую, восьмую и девятую рейки. Установочные зубчатки можно передвигать вдоль оси, но так как ось квадратная, то зубчатки могут вращаться только вместе с осью. На задний конец каждой квадратной оси жёстко насажена ещё *передающая зубчатка* (5) (рис. 18; на рис. 17 она не видна).

¹⁾ Мы будем обозначать установочные зубчатки соответственно римскими цифрами I, II, III, IV, V, если идти от задней стороны машины к передней.

В зависимости от того, какую цифру устанавливают в данном разряде, одна и только одна из установочных зубчаток оказывается зацеплённой с соответствующей этой цифре рейкой (рис. 18).

Установку цифры, отличной от нуля, производят нажатием соответствующей клавиши секции клавиатуры данного разряда. Как это устроено, будет подробно объяснено в § 11. Если нужно установить нуль, то ни одну из клавиш секции данного разряда не нажимают.

Рассматривая всю систему передачи движения от пропорционального рычага (1) до передающей зубчатки (5) (рис. 18), мы видим, что передвижение рычага от крайнего левого до крайнего правого положения (это передвижение называется рабочим ходом, а обратное — холостым ходом пропорционального рычага) при закреплённой нулевой рейке вызывает поворот каждой передающей зубчатки на столько зубцов, какова цифра, установленная в соответствующей секции клавиатуры.

Вращение передающей зубчатки нельзя передавать непосредственно на счётчик результатов, так как при холостом ходе пропорционального рычага передающие зубчатки вращали бы цифровые колёса в обратном направлении и тем самым сейчас же уничтожали бы переданное число. Поэтому между передающими зубчатками и воспринимающими зубчатками счётчика результатов поставлен промежуточный вал (2) (рис. 19). Его действие показано на рис. 18. Промежуточный вал (6) имеет прорез (7), в который вставлены промежуточные зубчатки (8). Во время рабочего хода пропорционального рычага промежуточный вал находится в таком положении, что промежуточные зубчатки передают вращение от передающих зубчаток к воспринимающим зубчаткам (9) счётчика результатов. А во время холостого хода промежуточный вал под действием особого фигурного колеса, так называемого «мальтийского креста» (не показанного на рис. 18), поворачивается на 90° , и сцепление прекращается.

При нажатии кнопки сложения (7) (рис. 12 на стр. 24) нулевая рейка закрепляется особым штифтом (10) (рис. 18), входящим в её отверстие (11), и начинает работать мотор (заставляя пропорциональный рычаг делать шесть полных качаний в секунду). За первый рабочий ход пропорционального рычага число, установленное на клавиатуре, переносится в счётчик результатов.

Если рычаг закрепления установленных клавиш (9) (рис. 12) находится в положении А, то после первого рабочего хода клавиатура автоматически гасится. Вычислитель может отпустить кнопку сложения не сразу, мотор будет продолжать работать, но показания счётчика результатов не изменятся. Если же рычаг закрепления установленных клавиш находится в положении М, то клавиатура.

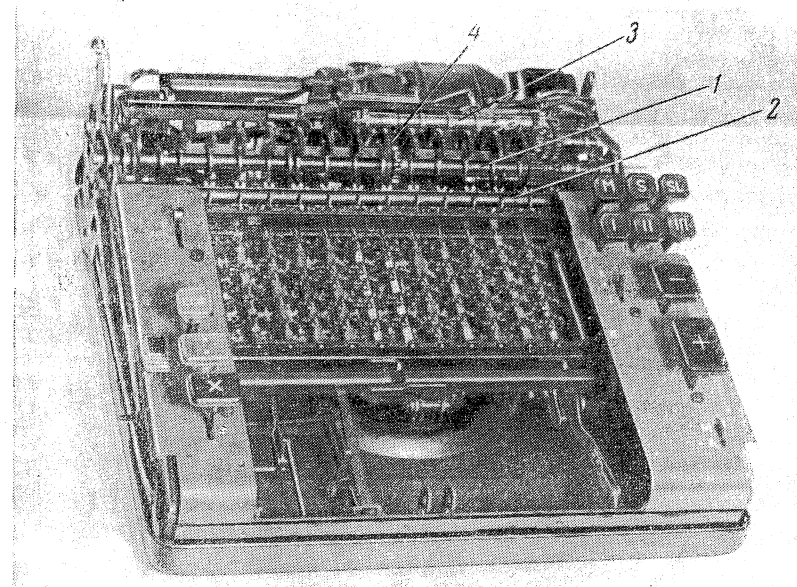


Рис. 19. Основной и промежуточный валы и вал счётчика оборотов. 1—основной вал, 2—промежуточный вал, 3—вал счётчика оборотов, 4—секторы основного вала.

не гасится, и установленное число складывается с самим собой при каждом рабочем ходе пропорционального рычага. Этим иногда пользуются для умножения на небольшие числа. В счётчике оборотов при этом отсчитывается число сложений. Если случайно будет сделано лишнее число сложений, следует нажать кнопку вычитания и держать её до тех пор, пока в счётчике оборотов не появится нужное нам число.

Если складывают разные числа, то рычаг закрепления установленных клавиш ставят в положение А. Каждое слагаемое устанавливают одно за другим на клавиатуре и каждый раз нажимают кнопку сложения. В счётчике результатов устанавливается сумма.

Вычитание в описываемой машине заменяется прибавлением так называемого «дополнительного» к вычитаемому числа (см. § 13). Умножение основано на том, что множитель автоматически передается в так называемое множительное устройство (мультипликатор), которое дальше само управляет умножением (см. § 14). Деление происходит автоматически по особой схеме, использующей чередование положительных и отрицательных остатков (см. § 15).

§ 11. Секция клавиатуры

Каждая секция клавиатуры (рис. 20, а) помещается над соответствующей квадратной осью (см. рис. 18 на стр. 29). Девять

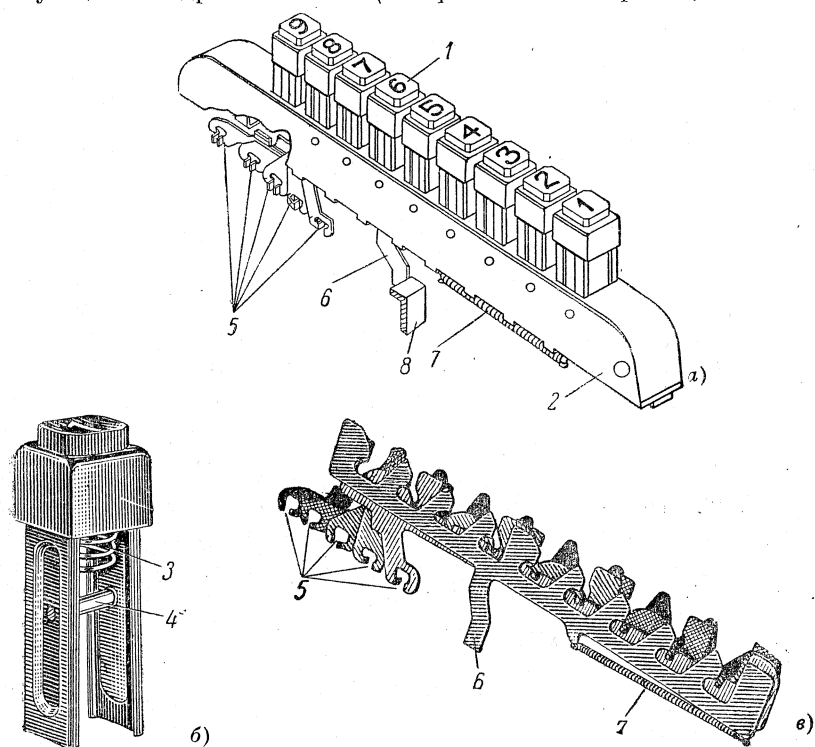


Рис. 20. Секция клавиатуры.

а) Собранная секция. б) Клавиша. в) Стопка фигурных пластин.

1—клавиша, 2—обойма, 3—пружина клавиши, 4—перекладина, 5—лапки, 6—рычаг гашения, 7—пружина фигурных пластин, 8—гасительная планка.

клавиши (1) заключены в общую *обойму* (2). Внутри каждой клавиши (рис. 20, б) имеется *пружина* (3), которая стремится удерживать

клавишу в верхнем положении. В нижней части клавиша имеет *перекладину* (4) (прямой круглый стержень, идущий слева направо).

В обойме помещаются шесть тонких *фигурных пластин*, образующих стопку (рис. 20, в) [на рис. 20, а видны только выступающие части этих пластин (5) и (6)].

Пять из них имеют *лапки* (5) для передвижения установочных зубчаток. Шестая служит для удержания клавиши в нажатом положении. Эта пластина имеет *рычаг гашения* (6). Первые пять пластин называются *установочными*, а шестая—*закрепляющей*. Одна из установочных пластин (обозначенная далее цифрой I) соединена с закрепляющей пластиной *пружиной* (7).

Рассмотрим, что происходит при установке какой-либо цифры (рис. 21). На рис. 21 показано взаимное расположение *перекладин* (1) клавиш (2), *фигурных пластин* (3), *установочных зубчаток* (4) и *основных реек* (5). Если переместить указанные детали на соответствующие расстояния по вертикали, то расположение рис. 21 будет соответствовать действительности.

Обозначим установочные пластины римскими цифрами I, II, III, IV, V. Теми же цифрами обозначены установочные зубчатки, передвигаемые пластинами (см. стр. 29). Закрепляющую пластину обозначим цифрой VI.

На рис. 21 установочные зубчатки находятся в нейтральном положении: зубчатка I зацеплена с нулевой рейкой, а остальные зубчатки находятся между рейками.

При нажатии какой-либо клавиши её перекладина, встречаясь с одним из *скосов* (6) закрепляющей пластины, смещает последнюю назад; после этого пластина под действием *пружины* (7) (рис. 20, а и в) возвращается вперед и *вырезом* (7) (рис. 21) закрепляет перекладину, а тем самым и клавишу в нажатом положении. Если ранее была нажата какая-либо другая клавиша, то при смещении закрепляющей пластины она освобождается.

Закрепляющая пластина имеет *рычаг гашения* (6) (рис. 20, а). При нажатии кнопки гашения клавиатуры (18) (рис. 12) рычаги гашения всех секций клавиатуры смещаются назад под действием *гасительной планки* (8) (рис. 20, а), что вызывает освобождение нажатых клавиш.

При нажатии клавиши 1 её перекладина, встречаясь с отлогим *скосом* (9) установочной пластины I, передвигает пласти-

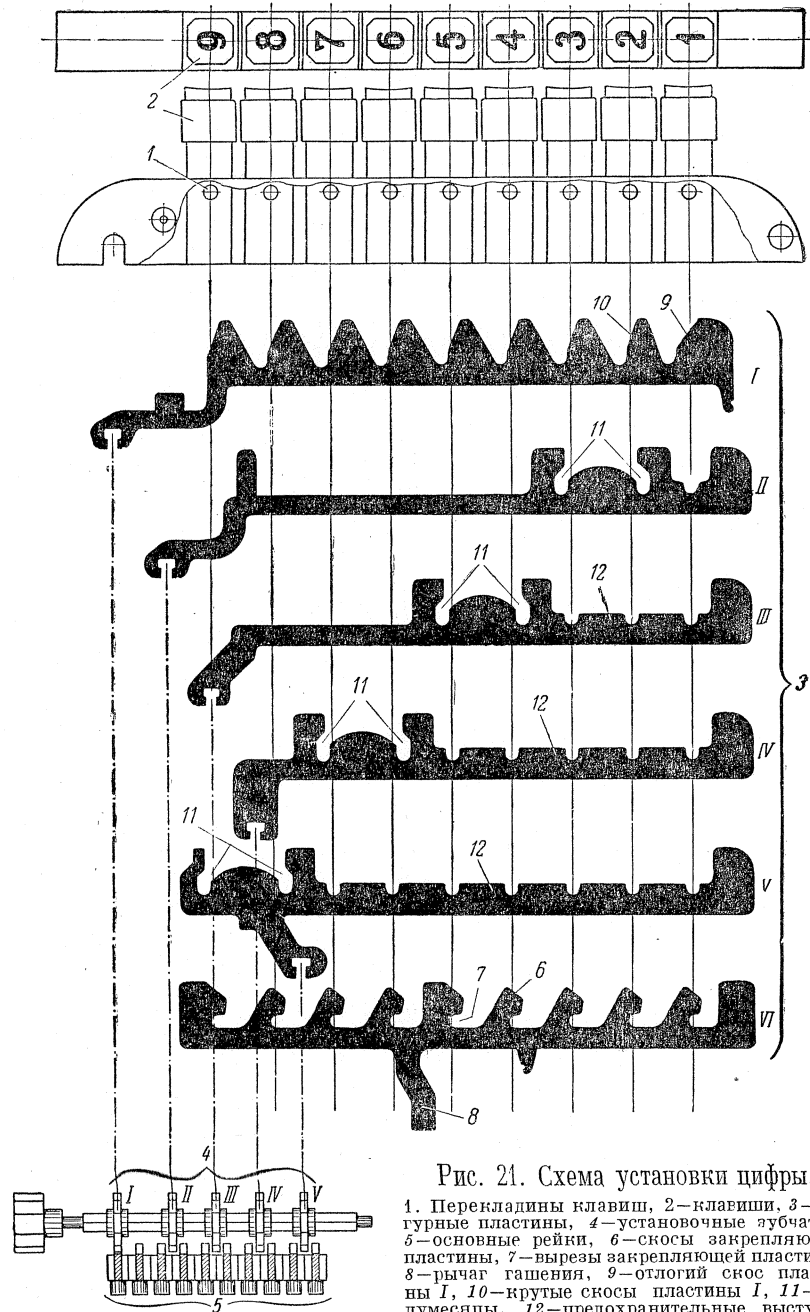


Рис. 21. Схема установки цифры.

1. Перекладки клавиш, 2—клавиши, 3—фигурные пластины, 4—установочные зубчатки, 5—основные рейки, 6—скосы закрепляющей пластины, 7—вырезы закрепляющей пластины, 8—рычаг гашения, 9—отлогий скос пластины I, 10—крутые скосы пластины I, 11—полумесяцы, 12—предохранительные выступы.

ну I вперёд, а тем самым переводит зубчатку I на первую рейку. Все установочные пластины остаются на прежних местах. При освобождении клавиши **1** установочная пластина I возвращается в исходное положение под действием пружины (7) (рис. 20, а и в).

При нажатии любой другой клавиши её перекладка, встречаясь с одним из крутых скосов (10) (рис. 21) пластины I, смещает её вперёд, но на вдвое меньшее расстояние, чем клавиша **1**; установочная зубчатка I выходит из зацепления с нулевой рейкой, но не входит в зацепление с первой. Кроме того, перекладка той же клавиши, попадая в *полумесяц* (11) (фигурный вырез, имеющий такую форму) одной из четырёх пластин II—V, передвигает эту пластину и тем самым переводит одну из установочных зубчаток на зубчатую рейку, номер которой совпадает с номером нажатой клавиши. При освобождении клавиши её перекладка, действуя на верхнюю часть полумесяца передвинутой пластины, возвращает её в исходное положение; пластина I возвращается в исходное положение под действием пружины (7) (рис. 20, а и в).

Итак, при нажатии любой клавиши одна и только одна установочная зубчатка входит в зацепление с зубчатой рейкой. Последнее обстоятельство очень важно, так как зацепление двух зубчаток, сидящих на одной квадратной оси, с двумя рейками, которые при работе автомата движутся с разными скоростями, застопорило бы мотор и могло бы повести к поломке машины. Поэтому приняты меры, не позволяющие двум клавишам одной и той же секции клавиатуры находиться одновременно в нажатом положении. А именно, если две клавиши нажимать по очереди, то, как было указано, клавиша, нажатая первой, освобождается. Если одновременно нажать две клавиши, действующие на одну и ту же установочную пластину (например, клавиши и **2** **3**, действующие на пластину II), то они, нажимая на противоположные скосы одного и того же полумесяца, стремятся сдвинуть пластину в разных направлениях и не могут быть нажаты до конца, а следовательно, и закреплены. Если, наконец, нажать две клавиши, действующие на разные установочные пластины (например, клавишу **4**, действующую на пластину III, и клавишу **7**, действу-

ющую на пластину IV), то в силу смещения пластины с большим номером её предохранительные выступы (12) становятся на пути движения переключателя клавиши, действующей на пластину с меньшим номером, и одновременное нажатие оказывается невозможным.

§ 12. Перенос десятков в счётчике результатов

Счётчик результатов (см. рис. 17 на стр. 28) состоит из 12 цифровых колёс (5), фиксирующих пружинки, механизма десятичного переноса и гасительного механизма. Цифровое колесо счётчика

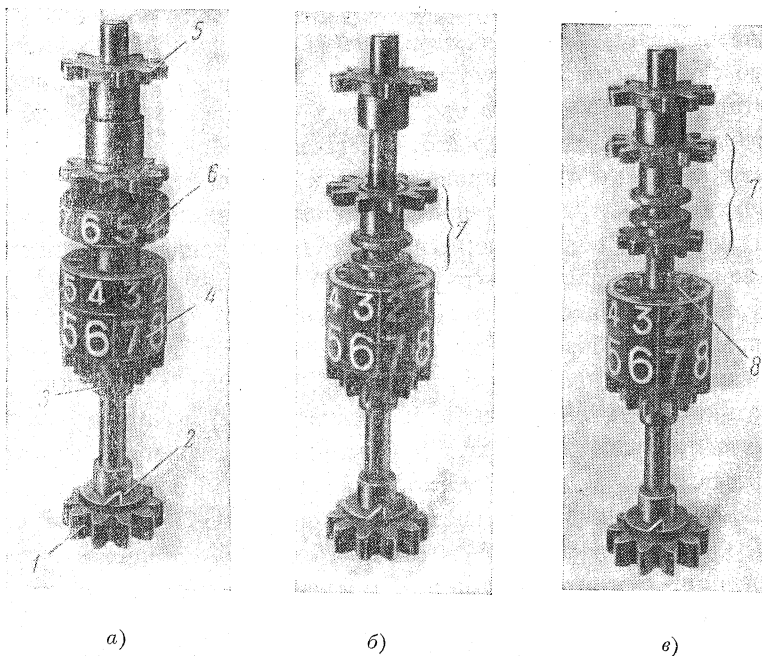


Рис. 22. Цифровые колёса счётчика результатов с надетыми на них деталями: цифровым колесом счётчика оборотов (а) и соединяющим колесом в переднем (б) и заднем (в) положениях.

1—воспринимающая зубчатка, 2—десятичный зуб, 3—десятичная зубчатка, 4—барабан с цифрами, 5—гасительная зубчатка, 6—цифровое колесо счётчика оборотов, 7—соединяющее колесо, 8—вырез барабана с цифрами.

результатов (рис. 22) имеет сложное строение и может быть названо колесом только условно. А именно, на одну ось жёстко насажены воспринимающая зубчатка (1) с десятичным зубом (2), десятичная зубчатка (3), барабан с цифрами (4) и гасительная зубчатка (5).

Замечание. На рис. 22 видно, что на оси цифрового колеса насажены ещё другие детали, которые, однако, не используются при работе счётчика результатов, и поэтому в настоящем параграфе на них не следует обращать внимания.

О том, как происходит передача установленного числа в счётчик результатов, было сказано в § 10. В настоящем параграфе мы опишем перенос десятков в счётчике результатов.

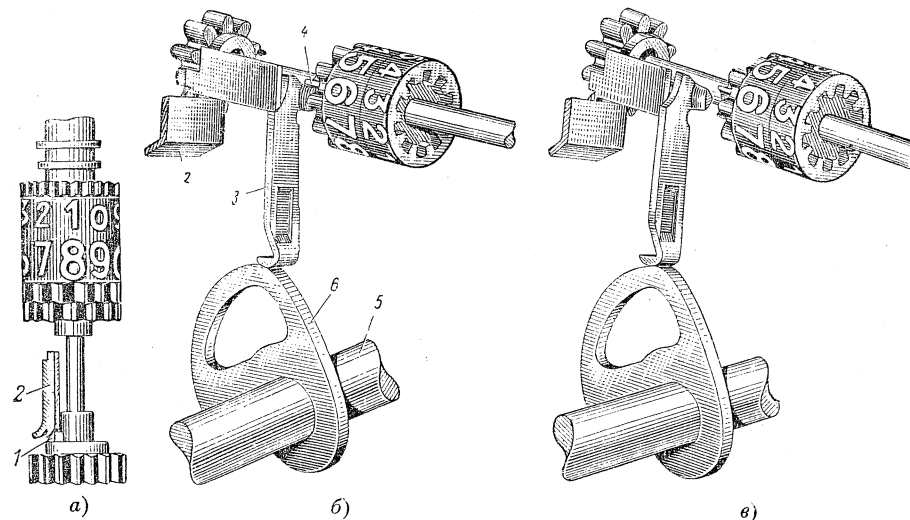


Рис. 23. Перенос десятков в счётчике результатов.

а) Накопление десятка на цифровом колесе. б) Десятичный перенос (вид сзади). в) Движение десятичника при невыдвинутом сапожке (вид сзади).

1—десятичный зуб, 2—сапожок, 3—десятичник, 4—десятичная зубчатка, 5—основной вал, 6—его сектор, 7—планка для возвращения сапожков в исходное положение.

Перенос десятков (рис. 23) осуществляется при помощи десятичного зуба (1), сапожка (2), десятичника (3), десятичной зубчатки (4) и основного вала (5), несущего на себе секторы (6). Угол секторов, если идти налево, постепенно уменьшается (см. рис. 19 на стр. 31) по той же причине, по какой в арифмометре¹⁾ отклоняющиеся зубцы расположены по винтовым линиям. Но так как в счётном автомате вычитание заменяется сложением (см. § 13), нужна только одна винтовая линия. В этом — преимущество замены вычитания сложением.

¹⁾ См. подробное объяснение в § 5.

Перенос десятков происходит во время холостого хода пропорционального рычага. При вращении основного вала его секторы поднимают десятичники (рис. 23, б и в). Если цифровое колесо какого-либо разряда прошло через положение в окошке счётчика $9-0$ (рис. 23, а), то его десятичный зуб (1) выдвигает сапожок (2) на путь движения десятичника соседнего старшего разряда. В этом положении сапожок удерживается особой защёлкой (на рисунке не показана). Двигаясь вверх, десятичник встречает выдвинутый сапожок, отклоняется скосом сапожка в сторону десятичной зубчатки соседнего старшего разряда и поворачивает её на один зубец (рис. 23, б). После этого специальная планка (7), общая для всех разрядов, действуя на выступ сапожка, возвращает его в исходное положение. Десятичник возвращается в исходное положение под действием пружины (на рис. 23 не показана).

Если цифровое колесо данного разряда не прошло через положение $9-0$, то сапожок не выдвигается, и десятичник, поднимаясь, не производит десятичного переноса (рис. 23, в).

§ 13. Вычитание

В счётном автомате с пропорциональным рычагом вычитание заменяется прибавлением числа, так называемого «дополнительного» к вычитаемому и ещё единицы. Если машина 12-разрядная, то «установленным» числом мы всегда будем считать 12-значное число, несколько левых цифр которого могут быть и нулями. Например, если не нажаты клавиши на шести левых секциях, а на следующих набрано число 415 032, то мы будем считать, что на клавиатуре «установлено» число 000 000 415 032. Дополнительным к нему числом мы будем называть число, цифры которого дополняют до 9 цифры установленного числа. В нашем примере оно будет 999 999 584 967.

Пусть установленное уменьшаемое есть

$$A = a_{12}a_{11}a_{10}a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1,$$

где a_i — его цифры, а установленное вычитаемое есть

$$B = b_{12}b_{11}b_{10}b_9b_8b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1,$$

где b_i — его цифры. Тогда число, дополнительное к вычитаемому, имеет цифры

$$9-b_{12} \ 9-b_{11} \ 9-b_{10} \ 9-b_9 \ 9-b_8 \ 9-b_7 \ 9-b_6 \ 9-b_5 \ 9-b_4 \ 9-b_3 \ 9-b_2 \ 9-b_1.$$

Сумма уменьшаемого и числа, дополнительного к вычитаемому, равна $A - B + 999\,999\,999\,999$. Если к ней прибавить ещё единицу, то мы получим число $A - B + 1\,000\,000\,000\,000$. И если, наконец, от него отбросить левую цифру — единицу, то мы получим искомую разность.

Все эти операции производятся при нажатии кнопки вычитания (8) (рис. 12 на стр. 24) автоматически.

Уменьшаемое устанавливают на клавиатуре и нажимают кнопку сложения. Уменьшаемое устанавливается в счётчике результатов. Затем на клавиатуре устанавливают вычитаемое и нажимают кнопку вычитания. При этом (см. рис. 18) девятая рейка закрепляется штифтом (12).

Теперь (в отличие от сложения) во время рабочего хода пропорционального рычага девятая рейка остаётся неподвижной, восьмая — передвигается на один зубец и т. д., т. е. каждая рейка передвигается на число зубцов, равное дополнению до 9 к её номеру. Такой ход пропорционального рычага называется отрицательным (рис. 24), а ход пропорционального рычага при закреплённой нулевой рейке — положительным. Происходит сложение уменьшаемого и числа, дополнительного к вычитаемому.

Прибавление единицы и отбрасывание левой цифры происходит следующим образом.

К нулевой рейке прикреплена небольшая дополнительная рейка (2) (рис 14 на стр. 26). С дополнительной рейкой зацеплена *девятизубая зубчатка* (4) (рис. 17 на стр. 28), жёстко насаженная на *круглую ось* (3), параллельную квадратным осям и находящуюся слева от них на месте «нулевого» разряда. На эту же круглую ось жёстко насажена десятизубая передающая зубчатка (на рис. 17 не видна), такая же, как и передающие зубчатки квадратных осей.

При сложении (см. рис. 18 на стр. 29) девятизубая зубчатка (14) неподвижна, при вычитании она поворачивается на девять зубцов, т. е. совершает полный оборот. Передающая десятизубая зубчатка, как обычно, через зубчатку промежуточного вала поворачивает на десять зубцов воспринимающую зубчатку (17) «нулевого» разряда счётчика результатов. В «нулевом» разряде накапливается десяток, и он передаётся в первый разряд в виде единицы.

Отбрасывание левой цифры (единицы) от суммы уменьшаемого числа, дополнительного к вычитаемому, и единицы происходит чрезвычайно просто: эта цифра стоит в 13-м разряде, а счётчик результатов имеет 12 разрядов, и она выходит за пределы счётчика.

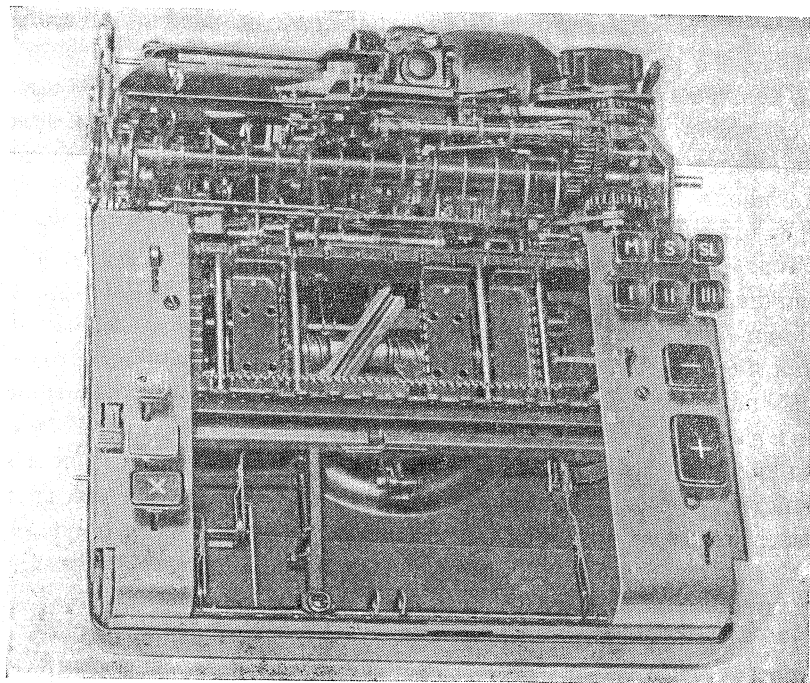


Рис. 24. Отрицательный ход пропорционального рычага.

Если уменьшаемое меньше вычитаемого, то разность оказывается отрицательной. Её абсолютную величину можно прочесть на счётчике результатов так же, как это делают в арифмометре (см. § 2). Можно поступить проще: передвинуть вправо рычаг заслонки счётчика результатов (24) (рис. 12 на стр. 24). При этом открываются цифры, стоящие в верхней части барабанов цифровых колёс, и абсолютную величину разности можно прочесть непосредственно. Если в последнем окошке появится красная цифра 0, к показаниям счётчика результатов нужно прибавить 10.

Рычаг закрепления установленных клавиш (9) (рис. 12) при вычитании действует так же, как и при сложении (см. § 10).

§ 14. Умножение

Под *основным валом* (2) (рис. 25) параллельно ему расположен *кулачковый вал* (1), который управляет подготовкой умножения и деления. На него жёстко насажены четыре *кулачка* (6) разной формы и назначения и два *пальца* (5). На кулачковый вал между пальцами свободно надет *зубчатка* (4), постоянно находящаяся в зацеплении с *зубчаткой* (3) основного вала с коэффициентом передачи 2:1, так что за два полных качания пропорционального рычага происходит один оборот кулачкового вала.

При умножении кулачковый вал смещается вправо, при делении — влево, причём соответственно левый или правый палец входит в отверстие (7) зубчатки (4). Вращение основного вала передаётся на кулачковый вал, и кулачки управляют работой автомата. Одни и те же кулачки управляют и умножением и делением, так как в правом и левом положении вала кулачки действуют на разные рычаги. При сложении и вычитании кулачковый вал находится в среднем положении, и вращение основного вала на него не передаётся.

В левой задней части каретки помещено множительное устройство (мультипликатор). На оси шести¹⁾ левых цифровых колёс счётчика результатов свободно надеты «соединяющие» колёса (рис. 17 на стр. 28 и рис. 22, б и в на стр. 36). В задних стенках барабанов с цифрами сделаны *зубчатые вырезы* (8) (рис. 22, в) по форме передней зубчатки соединяющих колёс (7). Соединяющие

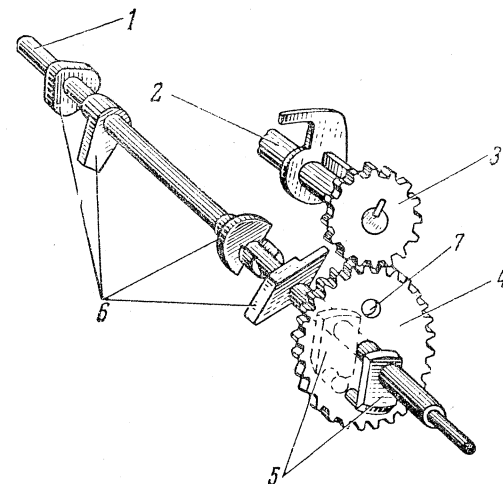


Рис. 25. Кулачковый вал и связанные с ним детали.

1—кулачковый вал, 2—основной вал, 3—зубчатка основного вала, 4—зубчатка кулачкового вала, 5—пальцы, 6—кулачки, 7—отверстие зубчатки кулачкового вала.

¹⁾ В машине с 16 разрядами—восемью.

колёса могут при помощи планки включения мультипликатора (общей для всех колёс) передвигаться вдоль осей цифровых колёс. Когда планка находится в заднем положении, соединяющие колёса не связаны с цифровыми колёсами (рис. 22, в). Когда же планка находится в переднем положении, соединяющие колёса входят передними зубчатками в вырезы и могут вращаться только вместе с цифровыми колёсами (рис. 22, б).

Соединяющие колёса с помощью зубчаток (коэффициент передачи 1:1) связаны с *множительными дисками* (1) (рис. 26). Каждый множительный диск имеет *вырез* (2), в который входит *серёжка* (3) — тонкая фигурная пластинка.

На задней стенке корпуса машины имеются две горизонтальные *множительные планки*: *основная* (4) и *дополнительная* (5).

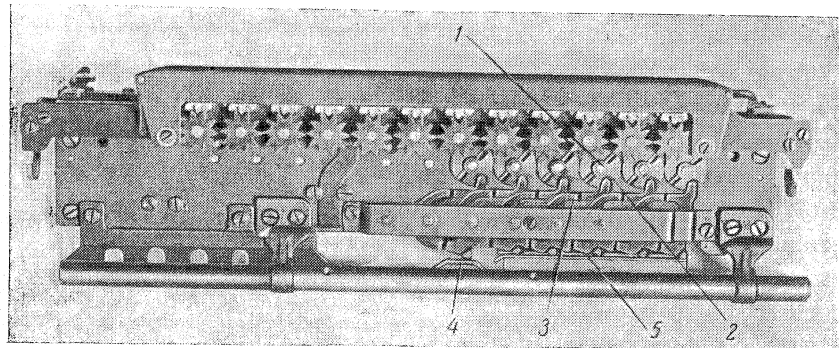


Рис. 26. Мультипликатор и множительные планки (вид сзади).

1 — множительные диски, 2 — их вырезы, 3 — серёжки, 4 — основная множительная планка
5 — дополнительная множительная планка.

Обе планки пружинами прижимаются вверх и, надавливая на нижние концы серёжек, вжимают их верхние концы в вырезы дисков мультипликатора, если все вырезы обращены вниз. Если же хоть один из дисков повернут, то серёжка отжата вниз, и опущена та планка, в которую упирается отжатая серёжка.

Рис. 26 соответствует крайнему левому положению каретки. В этом положении правая серёжка¹⁾ находится против основной планки, а остальные пять серёжек — против дополнительной.

¹⁾ На рис. 26 каретка изображена сзади и эта серёжка находится слева.

При умножении могут быть два случая, в зависимости от числа знаков сомножителей.

Случай 1. Число знаков каждого сомножителя не превосходит шести. Множимое (назовём так один из сомножителей) устанавливается на шести правых секциях, младшим разрядом на первой¹⁾ секции, а множитель — на шести левых, младшим разрядом на седьмой секции (она выкрашена в красный цвет). Рычаг умножения чисел больше шести знаков (15) (рис. 12, а на стр. 24) ставят в положение 1—6. Затем нажимают кнопку умножения (10). При этом кулачковый вал смещается вправо и начинает управлять умножением. За первые два полных качания пропорционального рычага (первый рабочий ход, первый холостой, второй рабочий ход, второй холостой), т. е. за первые два оборота основного вала, или за один оборот кулачкового вала происходит подготовка умножения. Далее совершается само умножение.

За первый рабочий ход все цифры, установленные на клавиатуре, передаются в счётчик результатов (так же, как при сложении).

В начале первого холостого хода первый кулачок смещает вперёд планку включения мультипликатора, и соединяющие колёса оказываются связанными с цифровыми колёсами счётчика результатов. В конце первого холостого хода второй кулачок отключает пропорциональный рычаг от мотора на время переключения рычага на вычитание, а третий кулачок переключает его на вычитание.

За второй рабочий ход число, установленное на клавиатуре, вычитается из того же числа, установленного в счётчике результатов. Во всех окошках счётчика результатов устанавливаются нули²⁾. Так как соединяющие колёса связаны с цифровыми колёсами счётчика результатов, они поворачиваются на те же углы, что и цифровые колёса, т. е. на углы, пропорциональные цифрам множителя. На те же углы поворачиваются также диски с вырезами. Мультипликатор «заряжен» — на него перенесён множитель.

¹⁾ Считаю справа налево. Всюду в этой главе мы будем придерживаться подобных обозначений.

²⁾ Если перед умножением счётчик результатов был погашен. Перед умножением можно и не гасить счётчик результатов. На подготовку умножения это не окажет влияния, а после умножения в счётчике результатов будет стоять сумма первоначальных показаний счётчика результатов и произведения.

В конце второго холостого хода первый кулачок освобождает планку включения мультипликатора, которая передвигает соединяющие колёса назад и тем самым прерывает связь между цифровыми колёсами и дисками мультипликатора. Вслед за этим четвёртый кулачок гасит клавиши 7—12 разрядов (на которых был установлен множитель), и кулачковый вал возвращается в среднее (нерабочее) положение. Этим заканчивается подготовка умножения.

Само умножение основано на том, что в зависимости от той или иной комбинации положений основной и дополнительной множительных планок мотор оказывается включённым на те или иные операции. А именно:

а) Если дополнительная планка опущена, то независимо от положения основной планки мотор передвигает каретку слева направо.

б) Если дополнительная планка поднята, а основная опущена, то мотор включён на положительные ходы пропорционального рычага; при этом за каждый ход множительный диск, стоящий против основной планки, поворачивается на $\frac{1}{10}$ оборота. Направление вращения множительного диска таково, что для возвращения выреза диска в нижнее положение (при котором основная планка поднимается) требуется столько ходов, какова цифра множителя, установленная на данном диске.

в) Если обе планки подняты, то мотор передвигает каретку справа налево.

Такое управление осуществляется с помощью довольно сложной системы рычагов, которую мы не будем описывать.

Пусть на мультипликаторе установлен какой-либо множитель, например 050372, т. е. число 50372. На рис. 27 мультипликатор и множительные планки нарисованы так, как будто они видны спереди, сквозь машину. Установленный множитель выписан на каретке. Изображены нижние части (б) опущенных серёжек.

Если множитель не однозначный (как в нашем случае), то дополнительная множительная планка опущена (рис. 27, а), и каретка передвигается вправо до тех пор, пока все серёжки, соответствующие значащим цифрам множителя, не уйдут с дополни-

тельной планки. При этом дополнительная планка поднимается (рис. 27, б). В этот момент серёжка, выдвинутая самой левой значащей цифрой множителя, окажется над основной планкой. Основная планка будет опущена, получится комбинация б) положений планок, при которой мотор переключится на положительные ходы пропорционального рычага и начнёт поворачиваться множительный диск, стоящий над основной планкой. Это будет продолжаться до тех пор, пока основная планка не поднимется и не получится комбинация в) положений планок. Ходов произойдёт столько, какова цифра, установленная на данном множительном диске. Множимое сложится само с собой столько же раз.

В силу комбинации в) положений планок каретка будет теперь передвигаться влево (рис. 27, в) до тех пор, пока на основную планку не «наедет» серёжка, соответствующая следующей значащей цифре множителя (рис. 27, г) и т. д. В крайнем левом положении каретки при поднятой основной планке мотор выключается. Мультипликатор «разряжен», в счётчике результатов устанавливается произведение, в счётчике оборотов — множитель.

Как мы видим, умножение производится слева направо, т. е. начиная со старших разрядов множителя.

Случай 2. Один из сомножителей (назовём его множимым) содержит больше шести знаков. Автомат может умножать его на любой множитель до шести знаков, лишь бы произведение не содержало больше двенадцати знаков. В противном случае на счёт-

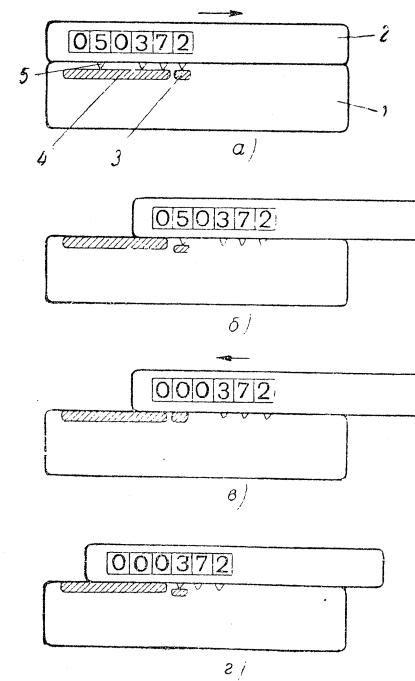


Рис. 27. Схема умножения (множитель равен 50372). а) Каретка движется вправо. б) Работает пропорциональный рычаг. в) Каретка движется влево. г) Работает пропорциональный рычаг. 1—корпус, 2—каретка, 3—основная множительная планка, 4—дополнительная множительная планка, б—нижние части опущенных серёжек.

чике результатов можно будет прочесть только двенадцать последних знаков произведения.

Рычаг умножения чисел больше шести знаков (15) (рис. 12, а на стр. 24) ставят в положение 1—12. Устанавливают множитель младшим разрядом на седьмой секции и нажимают кнопку умножения. При этом множитель передаётся на множительные диски, клавиатура гасится, и каретка передвигается вправо на число разрядов, на единицу меньше числа разрядов множителя. Рычаг умножения чисел больше шести знаков в положении 1—12 не позволяет переключать мотор на работу пропорционального рычага, и автомат останавливается. Устанавливают множимое младшим разрядом на первой секции и переводят рычаг в положение 1—6. Мотор переключается на работу пропорционального рычага, и всё происходит так же, как в случае 1.

На данном автомате можно получать алгебраическую сумму произведений. Для этого каждое произведение вычисляют описанным способом, но после проведения умножения счётчик результатов не гасят; если произведение входит в алгебраическую сумму со знаком «минус», то при его вычислении рычаг получения сумм и разностей произведений ставят в соответствующее положение.

Число, стоящее в шести левых разрядах счётчика результатов, можно перенести в мультипликатор, нажимая кнопку мультипликатора (19) (рис. 12 на стр. 24). При этом «соединяющие» колёса вдвигаются в вырезы цифровых колёс, и затем счётчик результатов гасится. На множительных дисках устанавливаются цифры, стоявшие в шести левых разрядах счётчика результатов. Счётчик оборотов при этом гасится, если рычаг сохранения показаний счётчика оборотов (20) находится в положении Е, и не гасится, если рычаг находится в положении А¹).

После того, как мультипликатор будет «заряжен» описанным образом, устанавливают множимое и нажимают кнопку умножения. В счётчике результатов устанавливается произведение.

Кнопкой мультипликатора удобно пользоваться при возведении в степень.

¹) Буквы Е и А на рис. 12 не видны. Буквой Е отмечено переднее положение рычага (20), буквой А — заднее.

§ 15. Деление

Деление в счётном автомате с пропорциональным рычагом происходит по схеме, в которой отрицательные остатки чередуются с положительными. В арифмометре знаки частного получают следующим образом: вычитают при сдвинутой каретке делитель из делимого до появления отрицательного остатка (до звонка) (а), прибавляют один раз делитель (б), передвигают каретку на один разряд влево (в) и повторяют описанный процесс. Операции в схеме деления на счётном автомате повторяются через получение каждых двух знаков частного. Поэтому мы сравним один «период» схемы деления на счётном автомате с получением двух знаков частного на арифмометре.

На арифмометре первые два знака частного получают следующим образом: вычитают при сдвинутой каретке делитель из делимого до появления отрицательного остатка (до звонка) (а), прибавляют один раз делитель (б), передвигают каретку на один разряд влево (в), вычитают делитель до появления отрицательного остатка (г), прибавляют один раз делитель (д).

В счётном же автомате этап (а) сохранён, этапы (б), (в), (г), (д) заменены передвижением каретки на один разряд влево и последующим сложением делителя с остатком до тех пор, пока остаток не станет положительным. Затем каретка сдвигается на один разряд влево, опять происходит вычитание до появления отрицательного остатка и т. д. При сложении цифровые колёса счётчика оборотов вращаются в отрицательном направлении, при вычитании — в положительном. По окончании деления в счётчике оборотов устанавливается частное.

На стр. 48 дана схема — пример деления на счётном автомате. В левом столбце написаны показания счётчика результатов и действия над ними. Звёздочкой отмечены показания счётчика результатов в тех случаях, когда они должны быть отрицательными. В этих случаях число -10^{12} выходит за пределы счётчика, но его нельзя упускать из виду. В правом столбце написаны показания счётчика оборотов и действия над ними.

Показания, написанные в одной и той же строке, соответствуют одному моменту времени.

Делимое равно 23256, делитель 43.

Схема деления на счётном автомате
с пропорциональным рычагом

$$23256 : 43 = 540,83$$

- 232560000000	+ 000000	+ *999500000000	- 054200
43	1	43	1
+ *802560000000	- 100000	+ *999930000000	- 054100
43	1	43	1
+ *845560000000	- 090000	- 000360000000	+ 054000
43	1	43	1
+ *888560000000	- 080000	- 000317000000	+ 054010
43	1	43	1
+ *931560000000	- 070000	- 000274000000	+ 054020
43	1	43	1
+ *974560000000	- 060000	- 000231000000	+ 054030
43	1	43	1
- 017560000000	+ 050000	- 000188000000	+ 054040
43	1	43	1
- 013260000000	+ 051000	- 000145000000	+ 054050
43	1	43	1
- 008960000000	+ 052000	- 000102000000	+ 054060
43	1	43	1
- 004660000000	+ 053000	- 000059000000	+ 054070
43	1	43	1
- 000360000000	+ 054000	- 000016000000	+ 054080
43	1	43	1
+ *996060000000	- 055000	+ *999973000000	- 054090
43	1	43	1
+ 996490000000	- 054900	+ *999977300000	- 054089
43	1	43	1
+ *996920000000	- 054800	+ *999981600000	- 054088
43	1	43	1
+ *997350000000	- 054700	+ *999985900000	- 054087
43	1	43	1
+ *997780000000	- 054600	+ *999990200000	- 054086
43	1	43	1
+ *998210000000	- 054500	+ *999994500000	- 054085
43	1	43	1
+ *998640000000	- 054400	+ *999998800000	- 054084
43	1	43	1
+ *999070000000	- 054300	000003100000	054083
43	1		

Рассматривая схему деления, мы видим, что в счётном автомате должно быть приспособление, которое во время изменения знака показаний счётчика результатов должно переключать мотор с работы пропорционального рычага на движение каретки. Таким приспособлением является *рычаг деления* (8) (рис. 17 на стр. 28).

Рычаг деления отклоняется в течение того же оборота основного вала, когда цифровое колесо старшего разряда счётчика результатов проходит через положение 9—0. Это достигается так же, как и передача накопившегося десятка с младшего разряда на старший.

Подробнее о работе рычага деления будет сказано ниже.

Теперь мы рассмотрим подготовку деления. Аналогично умножению могут быть два случая деления.

Случай 1. Делимое содержит до пяти знаков, делитель — до семи знаков. Делимое набирают старшим разрядом на двенадцатой секции, а делитель — старшим разрядом на седьмой секции. Затем нажимают кнопку деления (11) (рис. 12 на стр. 24). Кулачковый вал смещается влево, его палец входит в отверстие зубчатки, а кулачковый вал начинает вращаться. За первых два полных качания пропорционального рычага происходит подготовка деления.

За первый рабочий ход все установленные цифры передаются в счётчик результатов.

В конце первого холостого хода четвёртый кулачок гасит секции, на которых было установлено делимое, а второй кулачок отключает пропорциональный рычаг от мотора на время переключения рычага на вычитание. Третий кулачок переключает пропорциональный рычаг на вычитание.

При втором рабочем ходе происходит вычитание делителя из числа, стоящего в счётчике результатов. В счётчике результатов остаётся делимое. В правых семи разрядах счётчика результатов устанавливаются нули.

За второй холостой ход каретка смещается в крайнее правое положение (на пять разрядов вправо). Кулачковый вал возвращается в среднее положение. На этом подготовка деления заканчивается. Мотор переключается на работу пропорционального рычага.

Начинается вычитание делителя из делимого, которое продолжается до получения первого отрицательного остатка.

Вычитание в счётном автомате с пропорциональным рычагом, как мы знаем, заменяется прибавлением числа $10^{12} - B$, где B — вычитаемое (читатель легко убедится, что определённое в § 13 дополнительное к вычитаемому число, сложенное с единицей, равно $10^{12} - B$). Если $A > B$ (A — уменьшаемое), то $A + 10^{12} - B > 10^{12}$, и во время вычитания цифровое колесо старшего разряда счётчика результатов проходит через положение 9—0. Рычаг деления отклоняется. Следовательно, первый оборот основного вала, при котором рычаг деления не отклонится, произойдёт в тот момент, когда остаток станет отрицательным. Рычаг деления подаёт сигнал на переключение мотора с отрицательных ходов пропорционального рычага на передвижение каретки влево. Каретка передвигается на один разряд. Мотор переключается на положительные ходы пропорционального рычага. Они продолжают до тех пор, пока не будет получен первый положительный остаток.

Полученный при вычитании отрицательный остаток равен показаниям счётчика результатов минус 10^{12} (в случае отрицательного остатка $A + 10^{12} - B < 10^{12}$, и левая часть представляет собой показания счётчика результатов; можно считать, что отрицательный остаток $A - B$ представляет собой сумму показаний счётчика результатов и числа -10^{12} , стоящего за пределами счётчика).

Чтобы при сложении остаток стал положительным, цифровое колесо старшего разряда счётчика результатов должно пройти через положение 9—0. Тогда за пределы счётчика выйдет $+10^{12}$, оба числа, вышедшие за пределы счётчика, взаимно уничтожатся, и остаток станет положительным. Пока остаток будет отрицательным, цифровое колесо старшего разряда счётчика результатов не пройдёт через положение 9—0, т. е. рычаг деления не отклонится. Первый оборот основного вала, при котором рычаг деления отклонится, произойдёт в тот момент, когда остаток станет положительным. Рычаг деления подаёт сигнал на переключение мотора с положительных ходов пропорционального рычага на передвижение каретки. Затем начинаются отрицательные ходы пропорционального рычага и т. д. В крайнем левом положении каретки будут про-

исходить положительные ходы пропорционального рычага. При первом прохождении цифрового колеса старшего разряда счётчика результатов через положение 9—0 мотор будет выключен. В счётчике оборотов установится частное, в счётчике результатов — положительный остаток.

Случай 2. Деление числа до 12 знаков на число до семи знаков отличается от случая 1 только установкой исходных данных.

Делимое устанавливают старшим разрядом на двенадцатой секции. Нажатием кнопки сложения делимое переносят в счётчик результатов. После этого клавиатуру нужно гасить (что в случае 1 происходит автоматически). Гасят также счётчик оборотов [или же можно при перенесении делимого в счётчик результатов нажать до половины корректирующую кнопку счётчика оборотов (13) (рис. 12 на стр. 24), что выключает счётчик оборотов при всех действиях, кроме деления]. Затем набирают делитель старшим разрядом на седьмой секции и нажимают кнопку деления. Дальнейший процесс деления происходит так же, как и в случае 1.

В счётчике оборотов можно получать алгебраическую сумму частных. Для этого каждое частное вычисляют описанным способом, но после проведения деления счётчик оборотов не гасят: если частное входит в алгебраическую сумму со знаком «минус», то рычаг получения сумм и разностей произведений и частных ставят в соответствующее положение.

Если вычислитель по небрежности ставит старший разряд делителя правее седьмой секции, то мотору придется делать много лишних оборотов, пока не окончится деление (от нескольких десятков до нескольких миллионов). Дело в том, что с каждым оборотом основного вала из делимого вычитается число, во много раз меньшее, чем само делимое; а пока не появится отрицательный остаток в счётчике результатов, каретка не уйдёт из крайнего правого положения и деление не кончится.

Во избежание подобных случаев автомат снабжён рычагом прерывания деления (12) (рис. 12). Прерывание деления осуществляется оттягиванием этого рычага. После прерванного деления каретка возвращается в исходное положение при нажатии кнопки умножения.

§ 16. Счётчик оборотов

Счётчик оборотов подсчитывает число рабочих ходов пропорционального рычага (или, что то же, число оборотов основного вала). Один рабочий ход пропорционального рычага при каретке, смещённой вправо на n разрядов, учитывается как 10^n оборотов; это достигается совершенно так же, как и в арифмометре (см. § 6). Счётчик оборотов имеет шесть разрядов. В счётчике оборотов описываемого автомата осуществляется перенос десятков (этого нет в счётчике оборотов арифмометра).

Цифровые колёса счётчика оборотов насажены на оси шести¹⁾ правых цифровых колёс счётчика результатов (см. рис. 17 и 22, а). В корпусе автомата расположен вал счётчика оборотов (3) (рис. 19 на стр. 31).

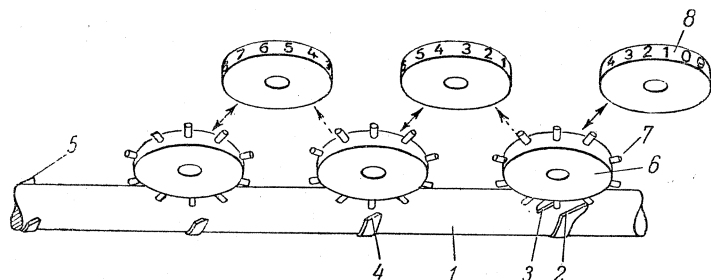


Рис. 28. Схема работы счётчика оборотов.

1—вал счётчика оборотов, 2—ведущий скос для работы в положительном направлении, 3—ведущий скос для работы в отрицательном направлении, 4—скосы для переноса десятков при работе в положительном направлении, 5—скосы для переноса десятков при работе в отрицательном направлении, 6—воспринимающие колёса, 7—цилиндрические зубцы, 8—цифровые колёса.

Действие счётчика оборотов показано на рис. 28. Вал счётчика оборотов (1) имеет один *ведущий скос* (2) для вращения цифровых колёс счётчика оборотов *в положительном направлении* (т. е. в таком направлении, когда его показания увеличиваются), один *ведущий скос* (3) для вращения цифровых колёс счётчика оборотов *в отрицательном направлении*, пять *скосов* (4) для переноса десятков при вращении в положительном направлении и пять *скосов* (5) для переноса десятков при вращении в отрицательном

¹⁾ В машине с 16 разрядами — восьми.

направлении. В каретке находятся *воспринимающие колёса* счётчика оборотов (6) с *цилиндрическими зубцами* (7). При одном обороте вала один из его ведущих скосов (какой именно — зависит от того, в каком направлении вращается вал) поворачивает воспринимающее колесо, находящееся против ведущих скосов, на один зубец (в зависимости от положения каретки против ведущих скосов находятся разные воспринимающие колёса счётчика оборотов). При вращении вала в разных направлениях воспринимающее колесо поворачивается также в разных направлениях.

Скосы для переноса десятков вдвое уже ведущих скосов и при нормальном положении воспринимающих колёс проходят между зубцами последних.

Над воспринимающими колёсами в шахматном порядке расположены *цифровые колёса* (8). Воспринимающее колесо связано зубчатой передачей 1:1 с цифровым колесом того же разряда (для упрощения чертежа зубчатка не нарисована, а между связанными колёсами поставлена сплошная стрелка).

На одну ось с воспринимающим колесом жёстко насажено однозубое колесо. При прохождении цифрового колеса данного разряда счётчика оборотов через положение 9—0 или 0—9 однозубое колесо поворачивает цифровое колесо соседнего старшего разряда «на ползубца» (т. е. на угол, вдвое меньший, чем угол между соседними зубцами). На рис. 28 такая передача изображена схематически, в виде пунктирной стрелки.

При повороте цифрового колеса на ползубца, воспринимающее колесо того же разряда поворачивается на тот же угол. Один из зубцов воспринимающего колеса попадает на путь движения соответствующего скоса для переноса десятков и «дворачивается» им на ползубца.

Десятичные скосы вала счётчика оборотов расположены по винтовым линиям¹⁾.

Читатель может спросить: зачем такое сложное устройство? Почему цифровое колесо данного разряда при прохождении через положение 9—0 или 0—9 не может поворачивать цифровое колесо соседнего старшего разряда сразу на целый зубец? Оказывается, что при таком устройстве детали счётчика оборотов испытывали бы

¹⁾ См. подробное объяснение в § 5.

большую нагрузку. Пусть, например, в счётчике оборотов стоит число 999 999. При повороте цифрового колеса младшего разряда на один зубец повернулись бы одновременно все шесть колёс, и усилие для поворота понадобилось бы гораздо большее, чем в существующей конструкции.

Вращение цифровых колёс счётчика оборотов в положительном или отрицательном направлении, как было указано, зависит от направления вращения вала счётчика оборотов, а это, в свою очередь, зависит от того, в каком положении находятся кнопки управления. При некоторых положениях кнопок управления счётчик оборотов отключается.

§ 17. Гашение счётчиков

На заднем конце оси каждого из 12 цифровых колёс счётчика результатов жёстко насажена *гасительная зубчатка* (5) (рис. 22

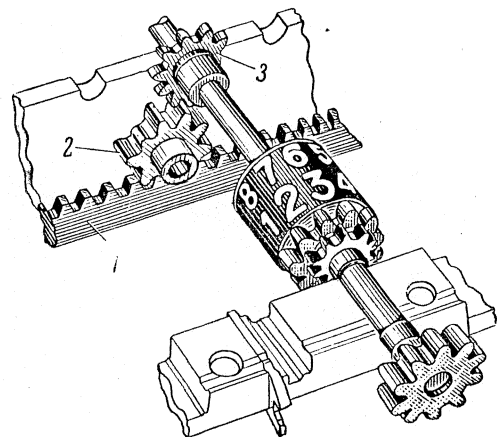


Рис. 29. Гашение счётчика результатов.
1 — гасительная рейка, 2 — промежуточная гасительная зубчатка, 3 — гасительная зубчатка.

на стр. 36). Она не имеет одного зуба. С ней (рис. 29) зацеплена *промежуточная гасительная зубчатка* (2). Один из зубцов последней вдвое уже остальных. Этот зубец расположен так, что он обеспечивает постоянное зацепление между *гасительной рейкой* (1) и промежуточной гасительной зубчаткой (2), но не задевает гасительной зубчатки (3).

При нажатии кнопки гашения счётчика результатов (16) (рис. 12 на стр. 24) гасительная рейка начинает вращать промежуточную гасительную зубчатку. Последняя входит в зацепление с гасительной зубчаткой и вращает её до тех пор, пока она не окажется обращённой к промежуточной гасительной зубчатке тем местом, где у неё пропущен зубец. В этот момент в соответствующем окошке счётчика результатов появляется цифра 0. Прекращение сцепления со всеми гасительными зубчатками позволяет промежуточным гасительным зубчаткам и гасительной рейке вернуться в исходное положение. В этом положении под гасительной зубчаткой оказывается узкий зубец промежуточной гасительной зубчатки, который не препятствует вращению цифрового колеса при работе автомата.

Аналогично производится гашение счётчика оборотов.

Если счётчик результатов нужно погасить, но его прежние показания через некоторое время нужно опять подать на счётчик, то их можно не записывать, а перенести в запоминающую шкалу (6) (рис. 12) нажатием кнопки (21). Счётчик результатов при этом автоматически гасится. При нажатии кнопки (22) запоминающая шкала, наоборот, гасится, а её показания переносятся в счётчик результатов.

ГЛАВА III
ПЛАНИМЕТРЫ

Математическими приборами называются малые математические машины непрерывного действия — планиметры, обобщённые планиметры, интегриметры, гармонические анализаторы, интегралы и другие¹⁾.

Описание математических приборов мы начнём с описания принципа действия и конструкции наиболее употребительных из них — планиметров.

Планиметрами называются приборы, устроенные так, что если один раз обвести обводным штифтом прибора контур некоторой площадки, то на барабане счётного колёсика можно прочесть величину площади этой площадки. Первые планиметры были осуществлены почти сто лет назад у нас П. А. Зарубиным и за границей Амслером, причём предложенные ими конструкции употребляются до сих пор.

§ 18. Основная теорема

Большинство планиметров основано на использовании следующей геометрической теоремы, которую поэтому можно называть основной теоремой теории планиметров.

Теорема. Если неизменный по длине²⁾ прямолинейный отрезок AB непрерывно передвигается по плоскости так, что в

¹⁾ Большие и сложные машины непрерывного действия — дифференциальный анализатор и аналогичные — математическими приборами обычно не называются; одну из таких машин мы рассмотрим в третьей части этой книги.

²⁾ Неизменность длины отрезка не используется при доказательстве; поэтому теорема верна и для отрезка переменной длины. Однако во всех далее рассматриваемых планиметрах эта теорема используется для отрезка постоянной длины.

конце концов он возвращается в исходное положение (т. е. точка A в точку A , а точка B в точку B), то «площадь, замётённая» при таком передвижении этим отрезком, равна разности «площадей замкнутых путей», описанных его концами.

Прежде чем доказывать эту теорему, поясним оба фигурирующие в ней своеобразных новых понятия.

Установим сначала, что мы будем называть «площадью, замётённой отрезком» при заданном его непрерывном передвижении по плоскости, причём мы не будем предполагать, как в теореме, что отрезок непременно возвращается в исходное положение.

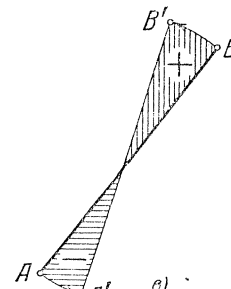
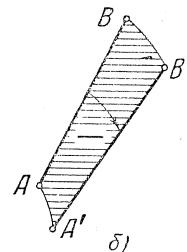
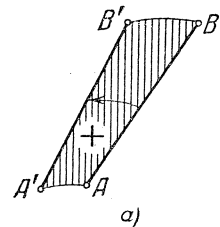
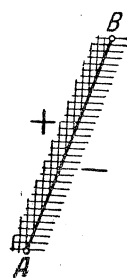


Рис. 30. Положительная и отрицательная стороны отрезка.

Рис. 31. Площадь, замётённая отрезком.
а) Отрезок движется положительной стороной вперёд
б) Отрезок движется отрицательной стороной вперёд
в) Отрезок вращается вокруг своей точки.

Условимся одну из сторон отрезка считать положительной, а другую отрицательной, а именно, положительной будем считать ту, которая лежит слева от AB , если идти от A к B (рис. 30).

Если какой-либо участок площади замечается так, что при этом отрезок движется положительной стороной вперёд, то замётённую им площадь мы будем считать положительной (рис. 31, а); если же он движется отрицательной стороной вперёд, то замётённую им площадь будем считать отрицательной (рис. 31, б). Может оказаться, что на каком-нибудь участке своего передвижения часть отрезка движется положительной стороной вперёд, а часть — отрицательной стороной вперёд (так, например, будет, если отрезок вращается вокруг какой-нибудь своей точки — рис. 31, в); тогда на этом участке площадью, замётённой отрезком,

будем считать алгебраическую сумму этих площадей. Вся площадь, замеченная на таком участке передвижения отрезка, может выйти и положительной, и отрицательной, и нулём, в зависимости от того, какой из «секторов» больше. Площадь, замеченной при произвольном непрерывном передвижении отрезка по плоскости, мы будем называть алгебраическую сумму положительных и отрицательных площадей, им при этом замеченных.

Ввиду того, что при своём передвижении отрезок может несколько раз заметить одну и ту же часть плоскости, и притом с разными знаками, «площадь, замеченная отрезком», не имеет простого геометрического смысла.

«Площадь, замеченная отрезком» при заданном его передвижении, есть некоторое действительное число (положительное, отрицательное или нуль), сопоставляемое этому передвижению.

Рассмотрим теперь другое понятие, используемое в теореме — «площадь замкнутого пути». Мы будем рассматривать замкнутый путь точки, непрерывно передвигающейся по плоскости и возвращающейся, наконец, в своё исходное положение. В содержание понятия путь мы не только вкладываем линию пути, но учитываем и направление передвижения по ней точки. Рассматриваемый замкнутый путь может быть и самопересекающимся.

При доказательстве теоремы нам будет нужен интеграл $I = \int \frac{\rho^2 d\omega}{2}$ в полярных координатах, взятый для случая, когда полюс неподвижен, а конец полярного радиуса ρ описывает такой замкнутый путь.

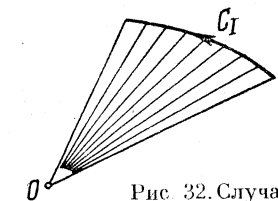


Рис. 32. Случай I.

Рассмотрим сначала случай I (рис. 32), когда путь C_I не замкнут и таков, что любой полярный луч пересекает его только в одной точке. Интеграл I даёт площадь соответствующего криволинейного сектора со знаком «+», если движение происходит так, как на рис. 32 (т. е. радиус ρ вращается против часовой стрелки), и со знаком «-», если движение происходит в обратном направлении. Это доказывается в любом курсе анализа.

Перейдём теперь к замкнутым путям.

Случай II (рис. 33). Пусть C_{II} , по которому движется конец полярного радиуса ρ , — замкнутый, самонепересекающийся и таковой, что любой полярный луч пересекает его не более двух раз. Пред-

положим, что обход происходит «против часовой стрелки», т. е. так, что внутренняя по отношению к пути часть плоскости¹⁾ остаётся слева. В этом случае интеграл I равен площади, заключённой внутри рассматриваемого пути. Действительно, рассмотрим пути m и n , соединяющие крайние полярные радиусы. Оба пути — типа I, т. е. интегралы I_m и I_n дают по абсолютной величине

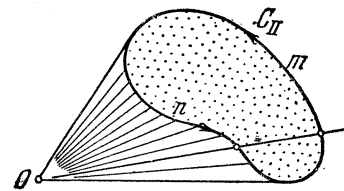


Рис. 33. Случай II.

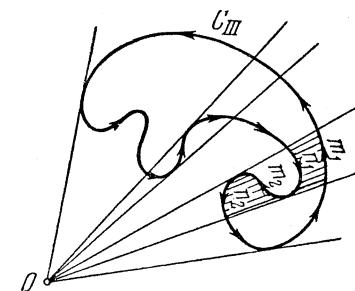


Рис. 34. Случай III.

площади соответствующих секторов, но если I_m положительный, то I_n отрицательный, так как если для пути m дифференциалы $d\omega$ положительны, то для пути n они отрицательны. В случае, когда путь C_{II} обегается против часовой стрелки, интеграл I по всему пути равен, следовательно, разности площадей этих секторов, т. е. площади внутри рассматриваемого пути. Очевидно, что если бы путь C_{II} обегался по часовой стрелке, то интеграл I давал бы площадь внутри этого пути со знаком «-».

Случай III (рис. 34). Путь C_{III} , по которому движется конец полярного радиуса ρ , — произвольный замкнутый самонепересекающийся. Обход совершается против часовой стрелки²⁾. Мы предполагаем, что можно провести конечное число n таких лучей из полюса O , что с каждым углом, лежащим между соседними лучами, путь C_{III} пересекается по последовательности конечного числа путей типа C_I , из которых каждый начинается на одном

¹⁾ Теорему Жордана о том, что замкнутая самонепересекающаяся линия (удовлетворяющая известным условиям) делит плоскость на две части — внутреннюю и внешнюю, — мы предполагаем известной.

²⁾ Мы не считаем необходимым вдаваться в излишние математические подробности. Все наши линии мы предполагаем «хорошими» — такими, что как замеченная площадь, так и площади замкнутых путей и все интегралы $\int \rho^2 d\omega$ имеют смысл.

луче и кончается на другом. Если обозначить пути типа C_I в данном угле между соседними лучами, начиная от наиболее удалённого от полюса O , последовательно через $m_1, n_1; m_2, n_2; \dots$ и т. д., то, как нетрудно убедиться, все пути m_i будут направлены от первой¹⁾ стороны угла ко второй, а n_i — от второй к первой; если бы обход совершался по часовой стрелке, то пути m_i , наоборот, шли бы от второй стороны к первой, а n_i — от первой ко второй. Часть плоскости, внутренняя по отношению к пути

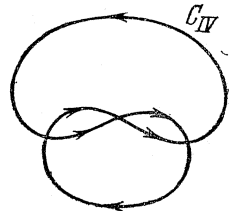


Рис. 35. Случай IV.

C_{III} и лежащая внутри данного угла, будет состоять из заштрихованных на рисунке частей, лежащих между путями m_1 и $n_1; m_2$ и n_2 и т. д. При этом на основании такого же рассуждения, как для случая II, $I_{m_1} + I_{n_1}$ даёт площадь первой части (наиболее удалённой от полюса O), $I_{m_2} + I_{n_2}$ — второй и т. д. Таким образом, интеграл $I_{C_{III}}$, который равен сумме интегралов для всех участков пути C_{III} , лежащих во всех углах между соседними лучами, будет давать всю площадь, лежащую внутри линии C_{III} . Очевидно, что если бы путь C_{III} обегался по часовой стрелке, то интеграл $I_{C_{III}}$ давал бы площадь внутри линии C_{III} , но со знаком «—».

Мы видим, между прочим, что как для пути C_{II} , так и для пути C_{III} рассматриваемый интеграл $\int \frac{\rho^2 d\omega}{2}$ не зависит от выбора полюса O .

Случай IV (рис. 35), когда замкнутый путь C_{IV} самопересекается, сложнее. Для выяснения того, чему равен интеграл I в этом четвёртом, самом общем случае, докажем следующую лемму.

Лемма. Путь C_{IV} можно (и притом иногда несколькими способами) разбить на конечное число путей типа C_{III} (т. е. замкнутых самонепересекающихся), может быть пересекающихся друг друга, но попарно не имеющих общих частей.

Доказательство. Назовём участки пути между соседними точками самопересечения отрезками. Мы будем предполагать, что число отрезков конечно; тогда конечно и число точек самопересечения. Каждый отрезок имеет определённое направление.

¹⁾ Первой стороной угла мы называем ту, которую надо поворачивать против часовой стрелки, чтобы, заметая этот угол, перейти ко второй.

Очевидно, что каждая точка самопересечения имеет по крайней мере два «подхода» отрезков и столько же «отходов» отрезков, сколько «подходов». При этом, конечно, может оказаться, что к ней подходит и тот же самый отрезок, который от неё отходит.

Рассмотрим какую-нибудь точку самопересечения и какой-либо из отходящих от неё отрезков. Если отходящий отрезок подходит к той же точке, то он сам образует путь типа C . Если он подходит к другой точке самопересечения, то рассмотрим какой-нибудь отрезок, отходящий от этой точки, и т. д. Так как точек самопересечения — конечное число, то мы в конце концов подойдём к какой-нибудь из уже использованных точек.

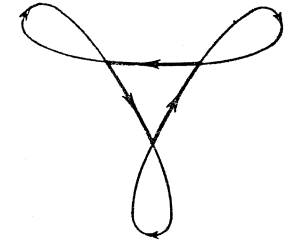


Рис. 36. Другой пример случая IV.

Если это будет та точка, с которой мы начали, то совокупность всех рассмотренных отрезков образует путь типа C_{III} .

Если же это будет какая-нибудь из следующих точек, отбросим все рассмотренные до неё отрезки. Тогда остальные рассмотренные отрезки образуют путь типа C_{III} . Сотрём теперь все отрезки, образующие полученный путь типа C_{III} . Быть может, теперь наш путь C_{IV} перестанет быть связным, т. е. разобьётся на несколько отдельных связных систем отрезков. Так будет, например, если на рис. 36 стереть жирный путь типа C_{III} . Но во всяком случае оставшаяся совокупность отрезков будет опять такой, что в каждой её точке, являющейся началом или концом какого-либо её отрезка, имеется столько же «подходов», сколько «отходов». Действительно, рассмотрим любую точку самопересечения пути C_{IV} . Либо она не затронута стиранием выделенного пути типа C_{III} , либо стёрт один «подход» к ней и один «отход».

Выделяя таким же образом из оставшейся совокупности отрезков новый путь типа C_{III} и т. д., мы в конце концов исчерпаем все отрезки и разобьём весь заданный путь C_{IV} на пути типа C_{III} . Иногда это разбиение можно сделать разными способами (как, например, на рис. 37, где это можно сделать четырьмя способами).

Интеграл I , взятый по пути C_{IV} , очевидно, равен сумме интегралов I , взятых по тем путям C_{III} , на которые можно разбить путь C_{IV} . Поэтому интеграл I по пути C_{IV} равен алгебра-

ической сумме площадей, заключённых в этих замкнутых самонепересекающихся путях C_{III} и взятых с соответствующими знаками, в зависимости от направлений их обходов. Эта алгебраическая сумма, таким образом, не зависит от того, как путь C_{IV} разбит на пути C_{III} . Эту алгебраическую сумму мы будем условно называть «площадью замкнутого пути C_{IV} ». В случае, когда путь самонепересекающийся, алгебраическая сумма сводится к одному

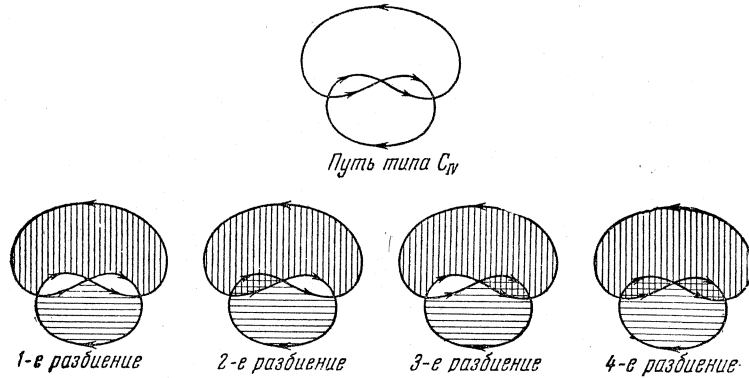


Рис. 37. Возможные разбиения пути типа C_{IV} на два пути типа C_{III} . Один из них является границей области, заштрихованной горизонтально, а другой — границей области, заштрихованной вертикально¹⁾.

слагаемому, а именно, она равна площади, заключённой внутри этого пути и взятой с соответствующим знаком.

Заметим, что интеграл I , взятый по пути C_{IV} , как и в случаях II и III, не зависит от выбора полюса.

Доказательство основной теоремы.

Для доказательства основной теоремы рассмотрим два последовательных положения отрезка AB и $A'B'$ (рис. 38). Мы будем предполагать, что передвижение отрезка из положения AB в соседнее положение $A'B'$ составлено из следующих двух элементарных перемещений: параллельного переноса из положения AB

¹⁾ Штриховка в клетку не показывает отдельной области, а является пересечением горизонтальной и вертикальной штриховок.

в положение $A'B^*$ и поворота вокруг точки A' из положения $A'B^*$ в положение $A'B'$. Таким образом, передвижение отрезка AB , фигурирующее в теореме, будет составлено из элементарных параллельных переносов и поворотов.

Примем некоторую фиксированную точку O за полюс вспомогательных полярных координат (см. рис. 39, а и б) и рассмотрим, как изменяется при передвижении отрезка AB площадь Δ треугольника OAB , вершиной которого является точка O , а основанием — этот отрезок. Рассмотрим сначала случай параллельного

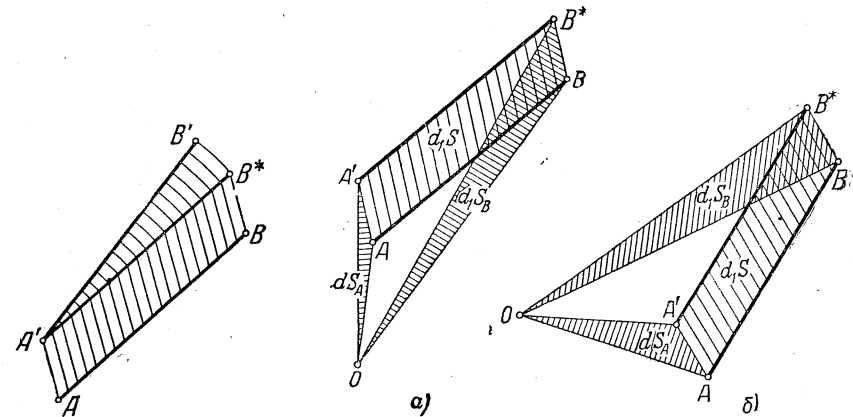


Рис. 38. Разложение передвижения на параллельный перенос и поворот.

Рис. 39. $d_1 \Delta = d_1 S_A - d_1 S_B + d_1 S$; а) и б) — два положения точки O .

переноса. Обозначим через Δ^* площадь треугольника $OA'B^*$, а через $d_1 \Delta = \Delta^* - \Delta$ — приращение (положительное или отрицательное) площади Δ при параллельном переносе. Площадь Δ будем считать положительной, если отрезок AB виден из полюса O со своей отрицательной стороны (см. выше о положительной и отрицательной стороне отрезка AB , стр. 57). Далее, обозначим через $d_1 S$ площадь (положительную или отрицательную), замеченную отрезком AB и через $d_1 S_A$ и $d_1 S_B$ — площади (положительные или отрицательные) «секторов» OAA' и OBB^* . Площадь «сектора», как всегда, считаем положительной или отрицательной в зависимости от того, против или по часовой стрелке вращается радиус-вектор ρ , исходящий из точки O и описывающий этот «сектор».

Докажем следующее равенство:

$$d_1\Delta = dS_A - d_1S_B + d_1S. \quad (1)$$

Это достаточно проверить для девяти положений точки O [в областях, отмеченных на рис. 40 цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9¹⁾] при движении AB положительной стороной вперёд и при движении AB отрицательной стороной вперёд. Например, для случая, изображённого на рис. 39, а

(точка O находится в области 1 рис. 40), площади Δ , Δ^* , dS_A , d_1S_B и d_1S все положительны, и мы имеем, подсчитывая двумя разными способами площадь всей фигуры, изображённой на рис. 39, а:

$$\Delta + dS_A + d_1S = \Delta^* + d_1S_B,$$

откуда

$$d_1\Delta = \Delta^* - \Delta = dS_A - d_1S_B + d_1S;$$

а для случая, изображённого на рис. 39, б (точка O находится в области 7 рис. 40), $\Delta < 0$, $\Delta^* < 0$, $dS_A > 0$, $d_1S_B > 0$, $d_1S > 0$; подсчитывая аналогично площадь всей фигуры, изображённой на рис. 39, б, имеем:

$$-\Delta + d_1S_B = -\Delta^* + dS_A + d_1S,$$

откуда опять

$$d_1\Delta = \Delta^* - \Delta = dS_A - d_1S_B + d_1S$$

и т. д.

Рассмотрим теперь, как изменяется площадь Δ^* треугольника $OA'B^*$ при повороте отрезка $A'B^*$ вокруг точки A' (рис. 41, а и б). Заменяем элементарный сектор $A'B^*B'$ треугольником $A'B^*B'$, т. е. заменим дугу сектора её хордой. Обозначим через Δ' площадь $OA'B'$, через $d_2\Delta = \Delta' - \Delta^*$ — приращение площади Δ^* , через d_2S — площадь (положительную или отрицательную) «сектора» $A'B^*B'$ (т. е. площадь, замечённую отрезком) и через d_2S_B — площадь «сектора» OB^*B' .

¹⁾ Если точка O находится не внутри, а на границе этих областей, то проверка ещё проще.

Докажем следующее равенство:

$$d_2\Delta = d_2S - d_2S_B. \quad (2)$$

Это достаточно проверить для семи положений точки O [в областях, отмеченных на рис. 42 цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7¹⁾] при вращении $A'B^*$ против и по часовой стрелке. Например, для случая, изображённого на рис. 41, а (точка O находится в области

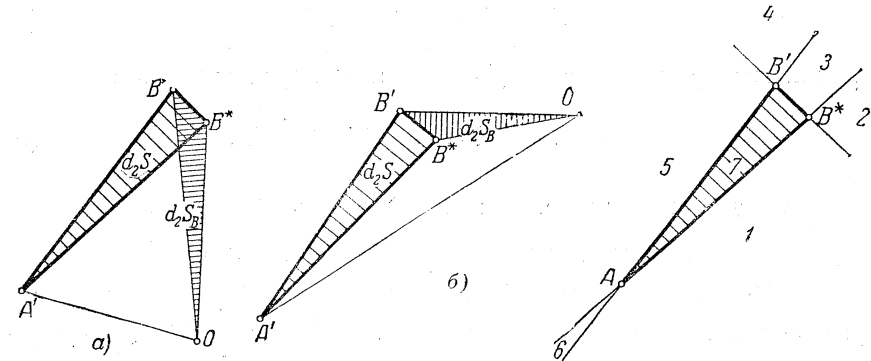


Рис. 41. $d_2\Delta = d_2S - d_2S_B$.
а) и б) — два положения точки O .

Рис. 42. Семь возможных положений точки O .

1 рис. 42), Δ^* , Δ' , d_2S и d_2S_B положительны, и мы имеем, подсчитывая двумя разными способами площадь всей фигуры, изображённой на рис. 41, а:

$$\Delta^* + d_2S = \Delta' + d_2S_B,$$

откуда

$$d_2\Delta = \Delta' - \Delta^* = d_2S - d_2S_B;$$

а для случая, изображённого на рис. 41, б (точка O находится в области 2, рис. 42), $\Delta^* > 0$, $\Delta' > 0$, $d_2S > 0$, $d_2S_B < 0$, и мы имеем:

$$\Delta^* + d_2S - d_2S_B = \Delta',$$

откуда опять

$$d_2\Delta = \Delta' - \Delta^* = d_2S - d_2S_B,$$

и т. д.

¹⁾ См. предыдущее подстрочное примечание.

Складывая равенства (1) и (2), получаем для общего элементарного передвижения отрезка AB , составленного из двух рассмотренных специальных элементарных передвижений, равенство

$$d_1\Delta + d_2\Delta = dS_A - (d_1S_B + d_2S_B) + (d_1S + d_2S). \quad (3)$$

Обозначая полные приращения величин Δ , S_A , S_B , S соответственно через $d\Delta = d_1\Delta + d_2\Delta$, dS_A , $dS_B = d_1S_B + d_2S_B$, $dS = d_1S + d_2S$, имеем:

$$d\Delta = dS_A - dS_B + dS. \quad (4)$$

Проинтегрируем равенство (4) «по всему передвижению отрезка»:

$$\int d\Delta = \int dS_A - \int dS_B + \int dS. \quad (5)$$

$\int d\Delta$ всегда равен нулю, так как площадь Δ при возвращении отрезка в исходное положение возвращается к своей исходной величине, а для этого она должна в общей сумме настолько же увеличиться, насколько уменьшиться. $\int dS_A$ и $\int dS_B$ равны соответственно площадям замкнутых путей точек A и B , т. е. S_A и S_B , а интеграл $\int dS$ — площади S , замеченной отрезком AB . Поэтому

$$S = S_B - S_A.$$

§ 19. Полярный планиметр

В простейшем осуществлении полярный планиметр (рис. 43) состоит из рычага AB , конец A которого шарнирно прикреплен к концу A рычага OA . На конце O последнего имеется остриё, вставляемое в чертёжную доску, так что точка A принуждена ходить по дуге окружности C_A радиуса OA с центром в точке O . Конец B рычага AB имеет штифт с рукояткой, при помощи которой можно обводить этим штифтом исследуемый путь C_B . На ось, параллельную¹⁾ рычагу AB , подшипники которой жёстко скреплены с ним, насажено счётное колёсико K . Колёсико весьма легко вращается. Ободок колёсика закруглён, так что

¹⁾ Можно показать, что если поставить ось не параллельно рычагу AB , прибор будет показывать не площадь рассматриваемого замкнутого пути.

оно может и катиться по плоскости без скольжения, если его двигать по плоскости перпендикулярно к его оси (рис. 44, а); и скользить по плоскости, не вращаясь, если его двигать по плоскости параллельно его оси (рис. 44, б); если же двигать колёсико под произвольным углом к его оси (рис. 44, в), то оно будет отчасти катиться, поскольку перемещение a имеет компоненту a_1 , перпендикулярную к оси, и отчасти скользить, поскольку перемещение a имеет компоненту a_2 , параллельную оси. Рядом с колёсиком K на рычаге AB имеется (не показанный на чертеже) счётчик числа его оборотов и их десятых, сотых и тысячных долей. Последние отсчитываются с помощью нониуса.¹⁾

Рис. 43. Схема полярного планиметра.

Прибор опирается на плоскость тремя точками — остриём O , вколотым в чертёжную доску, концом штифта B , которым обводят

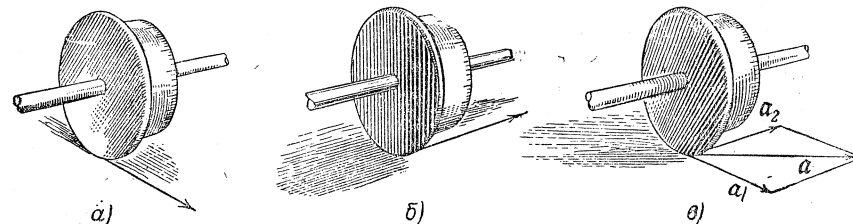


Рис. 44. Движение счётного колёсика.

а) Направление движения перпендикулярно к оси. б) Направление движения параллельно оси. в) Угол между направлением движения и осью — произвольный.

путь C_B , и точкой касания с плоскостью ободка счётного колёсика K .

Перейдём теперь к изложению теории полярного планиметра.

Случай 1. Рассмотрим сначала случай, когда при однократном обводе штифтом B линии C_B как рычаг OA , так и рычаг AB

настолько же поворачиваются в одну сторону, насколько в другую; посмотрим, как в этом случае связаны между собою число N (положительное, отрицательное или нуль, отсчитываемое в приборе с точностью до тысячных долей) оборотов счётного колёсика K и площадь S_B замкнутого пути C_B .

Заметим, что площадь S , замеченная при этом обводе пути C_B рычагом AB , равна

$$S = \int d_1 S + \int d_2 S.$$

Но в рассматриваемом случае $\int d_2 S = 0$ и, следовательно,

$$S = \int d_1 S. \quad (1)$$

Число оборотов, делаемое при этом обводе колёсиком K , равно

$$N = \int d_1 N + \int d_2 N,$$

где $d_1 N$ есть число оборотов колёсика K при элементарном параллельном переносе $d_1 S$, а $d_2 N$ — число его оборотов при элементарном повороте $d_2 S$ ¹⁾.

Но в рассматриваемом случае $\int d_2 N = 0$ и, следовательно,

$$N = \int d_1 N. \quad (2)$$

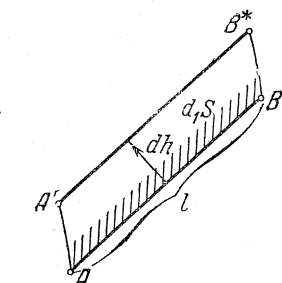


Рис. 45. К выводу формулы $d_1 S = 2\pi r l d_1 N$.

Посмотрим, как связаны между собою дифференциалы $d_1 S$ и $d_1 N$, входящие в интересующие нас величины S и N .

Та слагаемая элементарного параллельного переноса $d_1 S$, которая заставляет катиться колёсико K , т. е. слагаемая, перпендикулярная к оси колёсика K , и по величине, и по знаку равна высоте dh параллелограмма $d_1 S$ (рис. 45). Поэтому, если радиус колёсика K обозначить через r и положительным считать то направление, в котором оно вращается при параллельном переносе отрезка AB его положительной стороной вперёд, то число его обо-

¹⁾ Для краткости элементарные параллелограммы и секторы и соответствующие им передвижения рычага AB обозначены теми же буквами $d_1 S$ и $d_2 S$, что и площади этих фигур.

ротов $d_1 N$ будет равно $\frac{dh}{2\pi r}$. Но $d_1 S = l dh$, где l — обыкновенная положительная длина отрезка AB . Следовательно,

$$d_1 S = 2\pi r l d_1 N,$$

и, таким образом, если обозначить постоянную $2\pi r l$, зависящую только от прибора, через π , то мы получаем в силу (1) и (2):

$$S = \pi N.$$

Но в рассматриваемом случае $S_A = 0$, так как путь C_A сводится к дуге окружности, пробегаемой туда и обратно. Поэтому основная формула $S = S_B - S_A$ даёт: $S_B = S$, и, следовательно, в силу (3) искомая площадь

$$S_B = \pi N. \quad (1)$$

Общий случай. Пусть теперь при обводе замкнутого пути C_B рычаг OA поворачивается в одну сторону больше, чем в другую, на n_0 оборотов (где n_0 , конечно, — целое, так как рычаг в конце концов приходит в своё исходное положение), а рычаг AB — на n_1 оборотов (где n_1 — тоже целое).

В этом случае в отличие от предыдущего: 1) $\int d_2 S$ не равен 0, а равен $n_1 \pi l^2$; 2) $\int d_2 N$ тоже не равен нулю, а равен $n_1 \frac{\bar{R}}{r}$, где \bar{R} есть проекция вектора AK на направление AB ¹⁾ (рис. 46); 3) площадь S_A тоже не равна нулю, а равна $n_0 \pi l_0^2$. Поэтому мы имеем:

$$S_B = S + n_0 \pi l_0^2 = \int d_1 S + \int d_2 S + n_0 \pi l_0^2.$$

¹⁾ Действительно, $d_2 N = \frac{R}{2\pi r} \cos \alpha d\omega$, где $d\omega$ — не показанный на рис. 46 угол в радианах элементарного поворота рычага AB . Но $R \cos \alpha = \bar{R}$ и мы имеем $d_2 N = \frac{\bar{R}}{2\pi r} d\omega$ и, следовательно, для одного оборота рычага AB

$$N = \frac{2\pi \bar{R}}{2\pi r} = \frac{\bar{R}}{r}.$$

Но теперь, как и раньше, $d_1 S = \pi d_1 N$. Следовательно,

$$S_B = \pi \int d_1 N + n_1 \pi l^2 + n_0 \pi l_0^2.$$

Но $N = \int d_1 N + \int d_2 N$, а $\int d_2 N = n_1 \frac{\bar{R}}{r}$; следовательно,

$$\pi \int d_1 N = \pi N - \pi \int d_2 N = \pi N - 2\pi r l n_1 \frac{\bar{R}}{r} = \pi N - n_1 2\pi l \bar{R},$$

и поэтому мы имеем следующую общую формулу:

$$S_B = \pi N + n_0 \pi l_0^2 + n_1 (\pi l^2 - 2\pi l \bar{R}). \quad (\text{II})$$

Общий случай, когда n_0 и n_1 —какие угодно, встречается редко. Кроме рассмотренного выше случая I, когда $n_0 = n_1 = 0$, часто встречается ещё случай $n_0 = n_1 = 1$, который будем называть случаем II. Этот случай встречается так же часто, как и случай I, а именно: всегда, когда определяемая площадь—большая и приходится обводить точку B вокруг точки O .

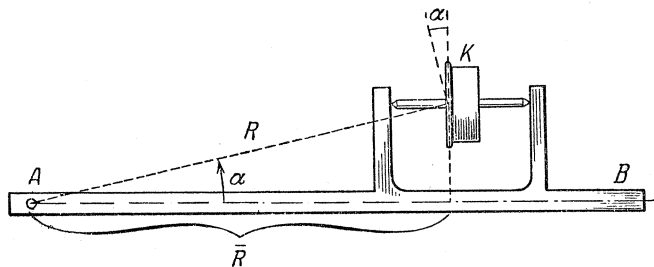


Рис. 46. К выводу формулы $\int d_2 N = n_1 \frac{\bar{R}}{r}$.

Когда $n_0 = n_1 = 1$, предыдущая общая формула принимает вид:

$$S_B = \pi N + \pi (l^2 - 2l\bar{R} + l_0^2). \quad (\text{III})$$

Окружность радиуса $\sqrt{l^2 - 2l\bar{R} + l_0^2}$ с центром в точке O называют «основной окружностью». Её описывает обводной штифт в том случае, когда колёсико K только скользит (это возможно лишь при $\bar{R} < l_0$). Действительно, для такой окружности $N = 0$, и, следовательно, площадь окружности S_B равна $\pi (l^2 - 2l\bar{R} + l_0^2)$, откуда следует, что радиус окружности равен $\sqrt{l^2 - 2l\bar{R} + l_0^2}$.

З а м е ч а н и е. Величина постоянной π иногда приложена к планиметру. Впрочем, её очень просто определить. Достаточно обвести штифтом B заранее известную площадь¹⁾ S так, чтобы были выполнены условия случая I. Если при этом $N = N_0$, то

$$\pi = \frac{S_0}{N_0}.$$

Слагаемые $\pi (l^2 - 2l\bar{R})$ и πl_0^2 можно определить, обводя штифтом B известную площадь S_0 , но так, например, чтобы один раз $n = 1$, $n_0 = 0$, а другой раз $n = 0$, $n_0 = 1$.

§ 20. Конструкция полярного планиметра

Полярный планиметр изображён на рис. 47. Рычаги OA (1) и AB (2) делаются большей частью длиной 20—30 см. Полнос рычага OA имеет короткую иглу (3) (рис. 47, в), вкальваемую в чертёжную доску. Чтобы игла не выскакивала из доски при работе планиметра, к рычагу OA над точкой O прикреплен небольшой груз (4), составляющий одно целое с иглой.

Шарнир A , которым скреплены рычаги планиметра, осуществляют разными способами. В старых моделях это был обычный шарнир с тонкой осью. Эта деталь особенно легко ломалась, в особенности при попытке неправильно складывать планиметр. В новых же моделях либо в самом рычаге AB , либо в тележке (5), закрепляемой на нём и несущей счётное колёсико K (6) (о тележке будет сказано ниже), устраивается коническое углубление (7) (на рис. 47, б показан второй способ). На рычаге OA имеется коническая цапфа (8) с шаровым концом (9) (рис. 47, в). Оба рычага отдельно уложены в футляре планиметра. Приступая к работе с планиметром, его «собирают», вставив цапфу в углубление. При таком устройстве шарнир A не ломается, так как толстая коническая цапфа очень прочна. Благодаря конической форме цапфы шарнир не расшатывается.

¹⁾ Иногда для этой цели к планиметру прилагается пластинка с остриём на одном конце (для вкальвания в бумагу) и небольшим углублением на другом, в которое вставляется остриё штифта B . Один оборот пластинки вокруг её острия заставляет штифт B обойти круг, площадь которого выгравирована на пластинке.

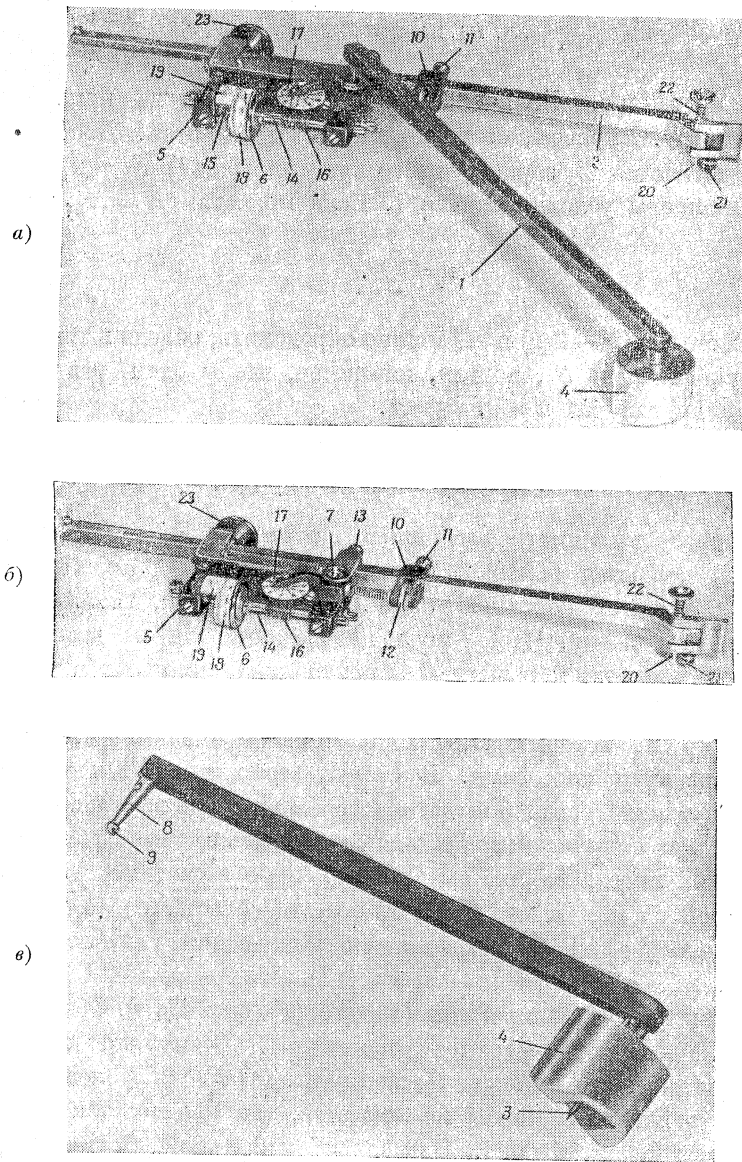


Рис. 47. Полярный планиметр

а) Собранный планиметр. б) Рычаг АВ. в) Рычаг ОА.

1—рычаг ОА, 2—рычаг АВ, 3—игла, 4—груз, 5—тележка, 6—счётное колёсико К, 7—коническое углубление, 8—коническая цапфа, 9—её шаровой конец, 10—муфточка, 11—её зажимной винт, 12—микрометрический винт, 13—зажимной винт тележки, 14—ось колёсика К, 15—её цапфы, 16—червячная нарезка, 17—диск, указывающий число оборотов колёсика, 18—барабан, 19—нониус, 20—обводной штифт В, 21—опорный штифт, 22—пружина, 23—опорное колёсико. Буквы А, В, О, К соответствуют рис. 43.

Описанная конструкция позволяет уменьшить ошибку, происходящую из-за возможной непараллельности оси колёсика К и рычага АВ. Для этого нужно, сделав обвод пути C_B , разъединить рычаги ОА и АВ, соединить их снова в симметричном положении OA_1B (рис. 48) и сделать второй обвод, а за окончательный результат взять полусумму полученных показаний.

Колёсико К в современных полярных планиметрах обычно смонтировано на отдельной тележке (5) (рис. 47, а и б), которая либо неподвижно закреплена на рычаге АВ, либо может быть закреплена в той или иной его точке при помощи муфточки (10), которую можно передвигать по рычагу АВ и закреплять на нём зажимным винтом (11) (на рис. 47 показан второй способ). Тележка связана муфточкой микрометрическим винтом (12), с помощью которого можно плавно передвигать тележку. Она может быть закреплена на рычаге АВ зажимным винтом (13).

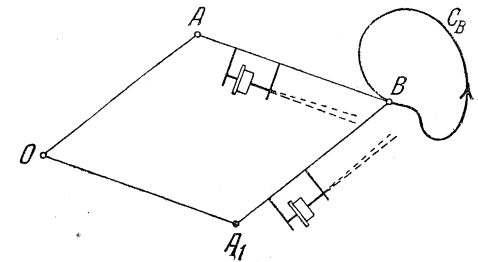


Рис. 48. Симметричные положения рычагов планиметра.

Ось (14) колёсика К кончается коническими цапфами (15), вращающимися в подшипниках с небольшими коническими углублениями (на рисунке не видны), так что колёсико К вращается очень легко. На оси (14) имеется червячная нарезка (16), которая через зубчатку (на рис. 47 не видна) поворачивает диск (17), указывающий число оборотов колёсика.

Колёсико К большей частью делается из стали диаметром около 2 см и толщиной около 2 мм с закруглённым и иногда слегка рифлёным ободком, чтобы оно и хорошо катилось по бумаге, и легко скользило по ней. К колёсику прикреплен барабан (18) несколько меньшего диаметра, чем колёсико, чтобы он не задевал бумаги. Барабан разделён на 100 частей, а к тележке прикреплен нониус (19), позволяющий отсчитывать тысячные доли оборота колёсика.

Рядом с острым обводным штифтом В (20) находится тупой опорный штифт (21), так что обводной штифт не доходит до бумаги и не царапает её. Обводной штифт можно опустить.

[преодолев действие пружины (22)], чтобы в начале обвода наколоть на бумагу исходную точку.

Кроме счётного колёсика, прибор имеет *опорное колёсико* (23).

В некоторых планиметрах обводной штифт заменён визиром из стекла или целлофана с нанесёнными на нём перекрещивающимися нитями или лупой с визиром. Это позволяет рассматривать путь C_B прямо сверху, что уменьшает ошибку, происходящую от того, что при обводе штифтом мы поневоле смотрим на путь C_B сбоку.

§ 24. Прецизионный ¹⁾ дисковый полярный планиметр

Значительно большей точности работы можно добиться, если описанный полярный планиметр модифицировать следующим образом.

«Полос» устраивают в виде тяжёлого зубчатого диска P радиуса R (рис. 49; зубцы диска P не показаны). В центре диска P помещается шарнир O , вокруг которого может вращаться рычаг OA , так что точка A ходит по окружности.

В некоторой точке O_1 рычага OA имеется подшипник с осью, на которую жёстко насажен диск D . На ту же ось снизу жёстко насажена зубчатка P_1 радиуса R_1 , зацеплённая с диском P .

При поворотах рычага OA вокруг точки O зубчатка P_1 катится по диску P и диск D вращается вокруг точки O_1 . С рычагом OA при помощи шарнира A скреплён рычаг AB , концом B которого обводят исследуемый замкнутый путь C_B . Диск D сверху тщательно оклеен бумагой; она является той рабочей поверхностью, по которой катится и скользит счётное колёсико K радиуса r . Колёсико K , ось которого па-

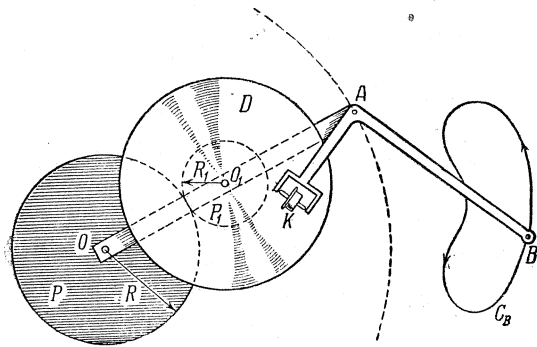


Рис. 49. Схема прецизионного дискового полярного планиметра.

¹⁾ Precisus — по-латински значит *точный*.

раллельна рычагу AB , смонтировано на конце отростка рычага AB , отходящего от точки A перпендикулярно рычагу AB .

Подсчитаем, чему будет равно число N оборотов счётного колёсика K , если один раз обвести штифтом B замкнутый путь C_B . При этом мы ограничимся только тем случаем, когда при обводе пути C_B рычаг OA настолько же повернётся в одну сторону, насколько и в другую ¹⁾.

Элементарное передвижение рычага AB из положения AB в положение $A'B'$ мы будем рассматривать не как сумму элементарного параллельного переноса и поворота (как делали в § 19), а как сумму следующих двух движений (рис. 50, а):

I) элементарного перемещения рычага AB из положения AB в положение $A'B^*$, которое происходит, когда вращается рычаг OA , а рычаг AB относительно рычага OA остаётся неподвижен;

II) элементарного поворота рычага AB из положения $A'B^*$ в положение $A'B'$ при неподвижном состоянии рычага OA .

Площадь, замечённая рычагом AB при полном передвижении, равна сумме площадей, замечённых этим рычагом при описанных элементарных передвижениях ²⁾. Введём обозначения:

d_1S — площадь, замечённая при элементарном передвижении типа I.

d_2S — площадь, замечённая при элементарном передвижении типа II.

d_1N — число оборотов колёсика K при элементарном передвижении типа I.

d_2N — число оборотов колёсика K при элементарном передвижении типа II.

¹⁾ Мы не делаем иных предположений относительно рычага AB , потому что при обводе любого замкнутого контура рычаг AB поворачивается относительно рычага OA настолько же в одну сторону, насколько и в другую. Рычаг AB не может повернуться на 360° относительно рычага OA , так как при этом счётное колёсико K отойдёт от диска D , и работа планиметра нарушится.

²⁾ Площадь dS , замечённая рычагом AB при одном элементарном передвижении, равна

$$dS = \text{пл. } AA'B'B = d_1S + d_2S + \text{пл. } BB'B'.$$

Последнее слагаемое есть бесконечно малая второго порядка, которую при интегрировании можно не принимать в расчёт.

Обозначения S_A и S_B будем употреблять в прежнем смысле (см. § 18): это — площади замкнутых путей, описанных точками A и B .

Прежде всего, $d_2N = 0$, так как при элементарных передвиже-

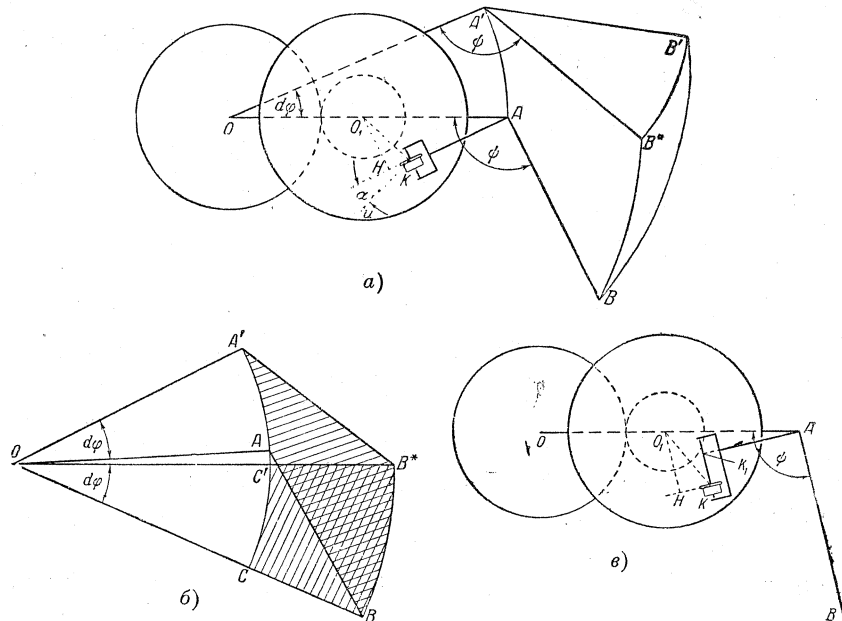


Рис. 50. Схема для подсчёта N и S .

а) Элементарные передвижения рычага AB . б) Определение d_1S .

в) Случай, когда плоскость ободка колёсика не проходит через точку A .

ниях типа II колёсико K движется параллельно своей оси. Поэтому

$$\int d_2N = 0,$$

т. е. число оборотов колёсика K , вызванных передвижениями типа II, равно нулю.

Передвижения типа II являются поворотами рычага AB относительно рычага OA . Поэтому, в силу условия, что рычаг AB поворачивается относительно рычага OA настолько же в одну сторону, насколько и в другую,

$$\int d_2S = 0.$$

Так как рычаг OA также поворачивается настолько же в одну сторону, насколько и в другую, то

$$S_A = 0.$$

Остаётся доказать, что

$$\int d_1S = \pi \int d_1N.$$

Для этого опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1H на прямую AK . Обозначим угол поворота рычага OA через $d\varphi$, угол поворота диска D относительно рычага OA через $d\theta$, угол OAB через ψ и угол между направлением KH (т. е. направлением ободка колёсика) и направлением Ku (т. е. направлением скорости точки K диска D , в данный момент касающейся колёсика) через α . При этом, очевидно,

$$R d\varphi = R_1 d\theta \text{ и } d\theta = d\varphi \frac{R}{R_1}; \quad \alpha = \angle KO_1H \text{ и } \cos \alpha = \frac{O_1H}{O_1K}.$$

На рис. 50, б видно, что пл. $AA'B^*B =$ пл. $CC'B^*B$ и, следовательно,

$$d_1S = \frac{OB^2 - OA^2}{2} d\varphi = \frac{AB^2 - 2OA \cdot AB \cos \psi}{2} d\varphi.$$

Подсчитаем d_1N :

$$\begin{aligned} d_1N &= \frac{O_1K d\theta \cos \alpha}{2\pi r} = \frac{O_1H d\theta}{2\pi r} = \\ &= \frac{AO_1 \sin \left(\psi - \frac{\pi}{2} \right) d\theta}{2\pi r} = - \frac{AO_1 \cos \psi R d\varphi}{2\pi r R_1}. \end{aligned}$$

Интегрируем d_1S и d_1N :

$$\begin{aligned} \int d_1S &= \int \frac{AB^2 - 2OA \cdot AB \cos \psi}{2} d\varphi = \\ &= \frac{AB^2}{2} \int d\varphi - OA \cdot AB \int \cos \psi d\varphi = -OA \cdot AB \int \cos \psi d\varphi \quad (1) \end{aligned}$$

($\int d\varphi = 0$, так как рычаг OA настолько же поворачивается в одну сторону, насколько и в другую);

$$\int d_1N = - \frac{AO_1 \cdot R}{2\pi r R_1} \int \cos \psi d\varphi. \quad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), имеем:

$$\int d_1 S = \frac{2\pi r R_1 \cdot OA \cdot AB}{AO_1 \cdot R} \int d_1 N.$$

На основании основной теоремы (§ 18) $S = S_B$ (в данном случае $S_A = 0$). Вспоминая, что $\int d_2 S = 0$ и $\int d_2 N = 0$, приходим к окончательному результату

$$S = \pi N, \quad (3)$$

где через π обозначена постоянная $\frac{2\pi r R_1 \cdot OA \cdot AB}{AO_1 \cdot R}$. Как и в полярном планиметре, её определяют, обводя заранее известную площадь.

Точность описанного планиметра раз в пять больше, чем обычного полярного.

З а м е ч а н и е. Колёсико K может быть помещено и так, что плоскость его ободка не проходит через точку A , лишь бы ось колёсика была параллельна рычагу AB . При таком расположении $d_2 N \neq 0$, но $\int d_2 N = 0$, так как рычаг AB поворачивается относительно рычага OA настолько же в одну сторону, насколько и в другую.

Подсчитаем $\int d_1 N$ для этого случая. Обозначим (рис. 50, в) через K_1 точку пересечения оси колёсика с прямой, перпендикулярной к AB и проходящей через точку A . Через H обозначим проекцию точки O_1 на прямую, проходящую через точку касания колёсика и диска D параллельно ободку колёсика. Остальные буквы будем употреблять в прежнем смысле.

$$\begin{aligned} d_1 N &= \frac{O_1 K d\theta \cos \alpha}{2\pi r} = \frac{O_1 H \cdot d\theta}{2\pi r} = \frac{AO_1 \cdot \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) + KK_1}{2\pi r} d\theta = \\ &= \frac{AO_1 (-\cos \psi)}{2\pi r} d\theta + \frac{KK_1}{2\pi r} d\theta = \frac{AO_1 (-\cos \psi) R}{2\pi r R_1} d\psi + \frac{KK_1 \cdot R}{2\pi r R_1} d\psi; \\ \int d_1 N &= \int \frac{AO_1 (-\cos \psi) R}{2\pi r R_1} d\psi + \frac{KK_1 \cdot R}{2\pi r R_1} \int d\psi; \end{aligned}$$

$\int d\psi = 0$, так как рычаг OA поворачивается настолько же в одну

сторону, насколько и в другую. Поэтому

$$\int d_1 N = -\frac{AO_1 \cdot R}{2\pi r R_1} \int \cos \psi d\psi,$$

т. е. мы опять пришли к выражению (2). Величины $\int d_2 N$, $\int d_1 S_1$, $\int d_2 S$ также сохраняют прежние выражения. Следовательно,

$$S = \pi N.$$

§ 22. Общие сведения о прямолинейных планиметрах

В обычном полярном и прецизионном дисковом полярном планиметре путь S_A точки A представляет собой дугу окружности с центром в полюсе O , пробегаемую туда и обратно, или одну или несколько целых таких окружностей. Поэтому описанные планиметры называются полярными. В *прямолинейных планиметрах* путь S_A точки A — прямолинейный отрезок, пробегаемый туда и обратно.

Прямолинейные планиметры выгодны в тех случаях, когда измеряемая площадка длинная, но узкая (например, когда надо измерить площадь под графиком, мало уклоняющимся от оси x , но идущим далеко вдоль неё).

Передвижение конца A рычага AB по прямой осуществляют разными способами: 1) устраивается направляющая линейка, вдоль которой может скользить направляющий ролик или штифт, находящийся в точке A ; 2) штифт A помещается в каретке, движущейся на двух роликах по прямолинейной рельсе; 3) точка A закрепляется неподвижно, а под ней протягивается рулон бумаги, навёрнутый на двух валиках; на бумаге нанесена кривая, которая при этом от руки обводится точкой B . Наконец, 4) часто устраивают так называемый направляющий «каток», состоящий из двух массивных цилиндрических колёс одинаковых радиусов, на ободах которых имеется насечка (как на напильнике), позволяющая колёсам только катиться, но не скользить по подложенной бумаге. Колёса жёстко связаны друг с другом массивной осью. Такой каток, не требующий ни рельсы, ни линейки, в силу одинаковости

радиусов своих колёс и жёсткости связи их друг с другом принуждён катиться по плоскости только строго прямолинейно. Шарнир A находится на подшипнике, насаженном на ось катка.

Действие прямолинейных планиметров основано на той же основной теореме § 18. Только в отличие от полярных планиметров для всех прямолинейных планиметров всегда $S_A = 0$, так как для последних путь S_A представляет собой не дугу окружности, а прямолинейный отрезок, пробегаемый туда и обратно. Поэтому, если при обводе штифтом B замкнутого пути C_B рычаг AB настолько же поворачивается в одну сторону, насколько и в другую (это обычно обуславливается конструкцией планиметра), то

$$S_B = \pi N.$$

Постоянную π определяют, как обычно, обводом заранее известной площади.

§ 23. Прецизионный прямолинейный дисково-катковый планиметр

Существуют различные прецизионные прямолинейные планиметры. Наиболее распространён из них так называемый *дисково-*

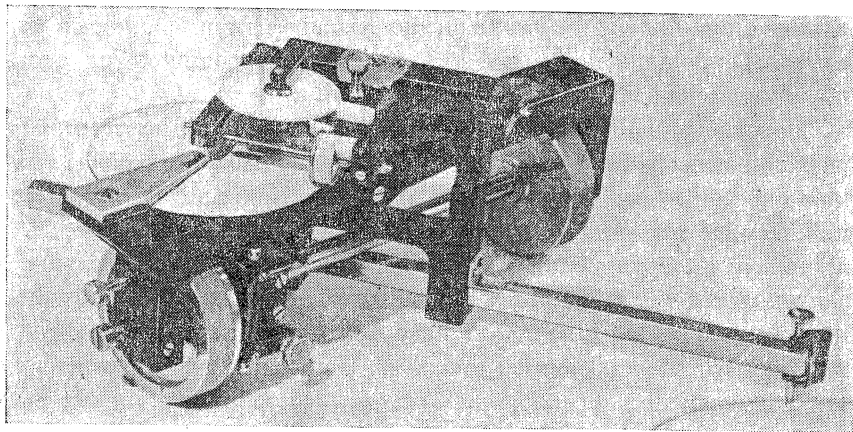


Рис. 51. Прецизионный прямолинейный дисково-катковый планиметр.

катковый планиметр (рис. 51 и 52). На «катке» движется каретка, к которой на вертикальной оси O прикреплен диск D (подобный

диску D прецизионного планиметра, описанного в § 21). На одну ось с диском D жёстко насажена зубчатка P радиуса R (на рис. 51 не видна). К одному из колёс катка прикреплена зубчатка, радиус которой равен радиусу колёс катка. Эта зубчатка зацеплена с зубчаткой P . На тележке укреплен шарнир A , вокруг которого может вращаться рычаг AB . Последний имеет счётное колёсико K радиуса r , совершенно такое же и так же смонтированное, как в прецизионном планиметре, который был описан в § 21.

Подсчитаем число N оборотов счётного колёсика K при однократном обводе штифтом B пути C_B (рис. 52). Передвижение рычага AB разобьём на элементарные параллельные переносы и повороты. Обозначения d_1S , d_2S , d_1N , d_2N мы будем употреблять в том же смысле, что и в § 19.

При повороте рычага AB вокруг точки A диск D не вращается; поэтому, рассуждая так же, как в § 21, можно убедиться, что $\int d_2N = 0$. Так как рычаг AB поворачивается настолько же в одну сторону, насколько и в другую (конструкция планиметра мешает рычагу AB повернуться на 360°), $\int d_2S = 0$. Остаётся подсчитать d_1S и d_1N .

Пусть каток движется параллельно оси x . Обозначим через α угол между рычагом AB и осью x . Если рычаг AB передвигается вдоль оси x на dx , то, очевидно,

$$d_1S = AB dx \sin \alpha. \quad (1)$$

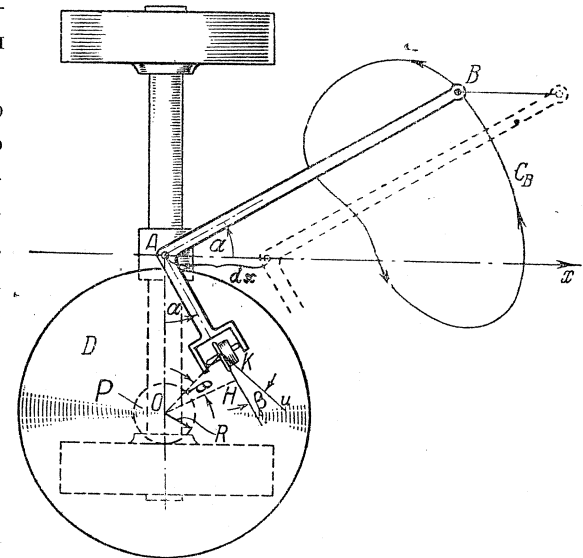


Рис. 52. Схема прецизионного прямолинейного дисково-каткового планиметра.

Подсчитаем d_1N . При передвижении катка параллельно оси x на dx его колесо поворачивается на угол $\frac{dx}{R_1}$ (R_1 — радиус колеса) и через скреплённую с ним зубчатку того же радиуса R_1 поворачивает зубчатку P , а тем самым и диск на угол $\frac{dx}{R}$. Опустим из точки O перпендикуляр OH на прямую AK . Обозначим через β угол между направлением KH (т. е. направлением ободка колёсика) и направлением Ku (т. е. направлением скорости точки K диска D , в данный момент касающейся колёсика). Очевидно, $\beta = \angle KOH$ и $\cos \beta = \frac{OH}{OK}$;

$$d_1N = \frac{OK dx \cos \beta}{2\pi r R} = \frac{OH dx}{2\pi r R} = \frac{AO \sin \alpha dx}{2\pi r R}. \quad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2) и интегрируя, имеем:

$$\int d_1S = \frac{2\pi r R \cdot AB}{AO} \int d_1N.$$

Так как $S_A = \int d_2S = 0$, $\int d_2N = 0$, имеем:

$$S_B = \pi N.$$

Постоянную π определяют обводом заранее известной площади.

§ 24. Сферически-катковый прямолинейный планиметр

В этом планиметре (рис. 53) счётное колёсико заменено цилиндром, обкатывающим шаровой сегмент.

На катке (1) вдоль оси x движется каретка (2). Она имеет платформу (3), которая может вращаться вокруг вертикальной оси A . На платформе помещён счётный цилиндр (4), ось которого параллельна рычагу AB . Счётный цилиндр может легко вращаться вокруг своей оси. К цилиндру прижимается шаровой сегмент (5), который вращается вокруг своей оси («ножки»), параллельной оси катка. Сегмент и «ножка» образуют «гриб». «Ножка» состоит из двух концентрических трубок, причём внутренняя (6) (на неё жёстко насажен сегмент) может двигаться относительно внешней (7) вдоль её оси, но вращаться может только вместе с внешней. Пружина (8), находящаяся в «ножке», прижимает сегмент к цилиндру.

Цилиндр может передвигаться вдоль своей оси. На ножку жёстко насажена зубчатка (9) радиуса R_1 . Она зацеплена с одним из колёс катка.

Подсчитаем число N оборотов счётного цилиндра при однократном обводе штифом B пути S_B . Передвижение рычага AB разобьём на элементарные параллельные переносы и повороты.

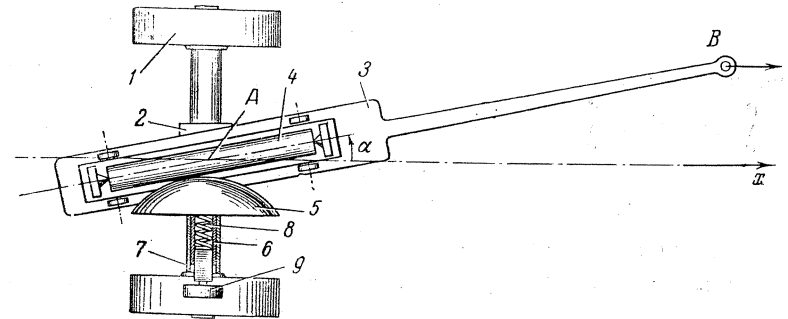


Рис. 53. Схема сферически-каткового планиметра.

1—каток, 2—каретка, 3—платформа, 4—счётный цилиндр, 5—шаровой сегмент, 6—внутренняя трубка «ножки», 7—внешняя трубка «ножки», 8—пружина, 9—зубчатка.

Обозначения d_1S , d_2S , d_1N , d_2N мы будем употреблять в том же смысле, что и в § 19.

При повороте рычага AB вокруг точки A счётный цилиндр не вращается; поэтому $d_2N = 0$ и $\int d_2N = 0$. Рычаг AB при обводе замкнутого контура поворачивается настолько же в одну сторону, насколько и в другую (как видно из рис. 53, рычаг AB не может сделать полного оборота); поэтому $\int d_2S = 0$.

Обозначим через α угол рычага AB и оси x , а через dx — расстояние, на которое сдвигается каток при элементарном параллельном переносе. Как и в § 23,

$$d_1S = AB dx \sin \alpha. \quad (1)$$

Остаётся подсчитать d_1N . При передвижении катка на dx любая точка обода колеса катка передвигается по отношению к каретке на ту же величину dx , и зубчатка (9) поворачивается

на угол $\frac{dx}{R_1}$. На тот же угол поворачивается шаровой сегмент (5). Точка касания сегмента и цилиндра находится на расстоянии r от оси цилиндра (где r — радиус цилиндра) и на расстоянии $R \sin \alpha$ от оси «гриба» (где R — радиус шара). Поэтому цилиндр поворачивается на угол $\frac{R \sin \alpha dx}{rR_1}$, и

$$d_1 N = \frac{R \sin \alpha dx}{2\pi r R_1}. \quad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2) и интегрируя, имеем, так как

$$S_A = \int d_2 S = 0 \quad \text{и} \quad \int d_2 N = 0,$$

$$S_B = \frac{2\pi r R_1 \cdot AB}{R} N = \pi N.$$

Постоянную π определяют обычным способом.

В описанном планиметре цилиндр обкатывает шар без скольжения.

ГЛАВА IV

ОБОБЩЁННЫЕ ПЛАНИМЕТРЫ

§ 25. Общие сведения

Обобщёнными планиметрами, или моментометрами, называются приборы, позволяющие при помощи обвода площадки обводным штифтом определять моменты разных порядков n данной площадки относительно данной оси (которую обычно будем принимать за ось x), находящейся в плоскости площадки, т. е. интегралы

$$\int \int y^n dx dy,$$

распространённые на данную площадку, для разных порядков n .

Напомним смысл моментов нулевого, первого и второго порядков данной площадки.

Момент нулевого порядка $M = \int \int dx dy$ есть площадь, или масса площадки¹⁾.

Момент первого порядка $M_x = \int \int y dx dy$ есть её статический момент относительно оси x .

Момент второго порядка $I_x = \int \int y^2 dx dy$ есть её момент инерции относительно оси x .

Определив площадь площадки M и её моменты первого порядка M_x и M_y относительно осей x и y , можно найти координаты центра тяжести площадки x_C и y_C по формулам:

$$x_C = \frac{M_x}{M}, \quad y_C = \frac{M_y}{M}.$$

¹⁾ Если предполагать, что площадка представляет собою такую пластинку, что на единицу её площади приходится единица массы.

Объём V тела вращения вокруг оси x , т. е. $\iint 2\pi y dx dy$, распространённый на площадку, являющуюся половиной осевого сечения тела вращения, получают по формуле

$$V = 2\pi M_x$$

и т. д.

Момент нулевого порядка, т. е. площадь площадки, находят обыкновенным планиметром. В этой главе мы рассмотрим принцип действия и конструкцию обобщённых планиметров, позволяющих определять моменты первого и второго порядков.

§ 26. Прибор с зубчатыми колёсами для определения момента первого порядка

Преобразуем выражение для M_x — момента первого порядка площадки относительно оси x — следующим образом:

$$M_x = \iint y dx dy = \frac{1}{2} \oint y^2 dx,$$

где криволинейный интеграл взят по контуру площадки, обходимому по часовой стрелке. Действительно, $\iint y dx dy$, распространённый на заштрихованную полосу площадки (рис. 54), равен

$$dx \int_{y_1}^{y_2} y dy = dx \left(\frac{y_2^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} \right);$$

следовательно, двойной интеграл, распространённый на всю площадку, равен

$$\frac{1}{2} \int_a^b y_2^2 dx - \frac{1}{2} \int_a^b y_1^2 dx = \frac{1}{2} \oint y^2 dx,$$

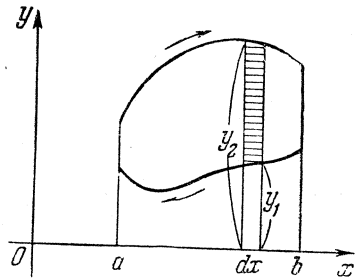


Рис. 54. Статический момент площадки.

что и требовалось доказать.

Если обводить контур площадки обводным штифтом B , находящимся на конце обводного рычага AB , точка A которого движется по оси x (рис. 55), то

$$M_x = \frac{1}{2} \oint y^2 dx = \frac{1}{2} l^2 \oint \sin^2 \alpha dx,$$

*Александр
Григорьевич
4/9*

где α — угол рычага AB с осью x , l — длина рычага AB . Переходя к двойному углу, получаем:

$$M_x = \frac{1}{4} l^2 \left(\oint dx - \oint \cos 2\alpha dx \right).$$

Но $\oint dx = 0$ и, следовательно,

$$M_x = -\frac{1}{4} l^2 \oint \cos 2\alpha dx = -\frac{1}{4} l^2 \oint \sin(90^\circ \pm 2\alpha) dx. \quad (1)$$

На основании формулы (1) осуществлён прибор для определения M_x , схематически изображённый на рис. 55. По прямолинейной рельсе (1), параллельной оси x , движется каретка (2).

Она имеет две зацеплённые зубчатки R_1 и R_2 , причём зубчатка R_2 — вдвое меньшего радиуса, чем зубчатка R_1 . С зубчаткой R_1 жёстко связан рычаг AB , концом которого обводят контур исследуемой площадки; с зубчаткой R_2 жёстко связаны подшипники оси (3) счётного колёсика K_1 ¹⁾. Так как радиус зубчатки R_2 вдвое меньше радиуса зубчатки R_1 и зубчатки надлежащим образом поставлены, угол между осью счётного колёсика K и осью x равен $90^\circ - 2\alpha$ (α — угол между рычагом AB и осью x).

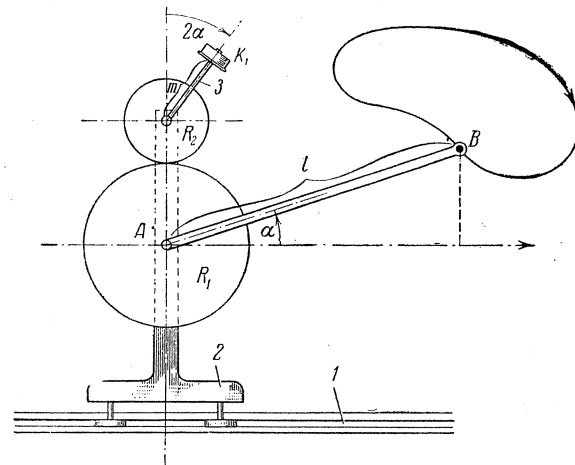


Рис. 55. Схема прибора с зубчатыми колёсами для определения момента первого порядка. 1 — рельса, 2 — каретка, 3 — ось счётного колёсика.

¹⁾ Колёсико обозначено здесь не K , а K_1 , и число его оборотов — не N , а N_1 , так как оно даёт момент первого порядка (пелесообразность этих обозначений будет выяснена в § 28). По тем же соображениям постоянная обозначена π_1 .

*Рис. 55
33-94-99*

Докажем, что число N_1 оборотов счётного колёсика K_1 при обходе штифтом B контура площадки пропорционально моменту M_x этой площадки. Заменяем для вывода на рис. 56, а контур площадки ступенчатым контуром. Передвижение точки B по горизонтальному отрезку на dx вызывает параллельный перенос оси (3) на

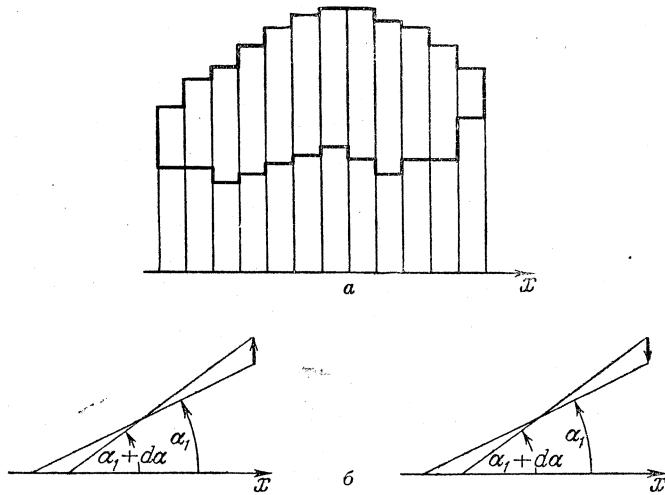


Рис. 56. Схема для подсчёта N_1 .

а) Ступенчатый контур. б) Передвижение точки B по вертикальным отрезкам.

то же расстояние в том же направлении; при этом счётное колёсико поворачивается на $\frac{m \sin(90^\circ - 2\alpha) dx}{2\pi r}$ оборотов, где r — его радиус, m — расстояние от оси зубчатки R_2 до ободка счётного колёсика. Передвижение точки B по всем горизонтальным отрезкам повернёт счётное колёсико на $\frac{m}{2\pi r} \int \sin(90^\circ - 2\alpha) dx$ оборотов, т. е., как это видно из формулы (1), на число оборотов, пропорциональное M_x — моменту ступенчатой площадки. Передвижение же точки B по всем вертикальным отрезкам даст поворот счётного колёсика, равный нулю (рис. 56, б), так как каждое перемещение вверх (угол α меняется от α_1 до $\alpha_1 + d\alpha$) будет «компенсироваться» ровно таким же перемещением вниз (угол α меняется от $\alpha_1 + d\alpha$ до α_1).

Итак, для любой ступенчатой площадки

$$M_x = \pi_1 N_1.$$

Это же справедливо (из соображений непрерывности) для любой площадки. Постоянную π_1 находят обычным способом.

§ 27. Кулисно-кривошипный прибор для определения момента первого порядка

Прибор для определения M_x может быть построен и без применения зубчатых колёс — при помощи кулисно-кривошипного механизма. Такой прибор схематически изображён на рис. 57. По прямой рельсе (1), параллельной оси x , движется каретка (2). К ней жёстко прикреплен изогнутый под прямым углом

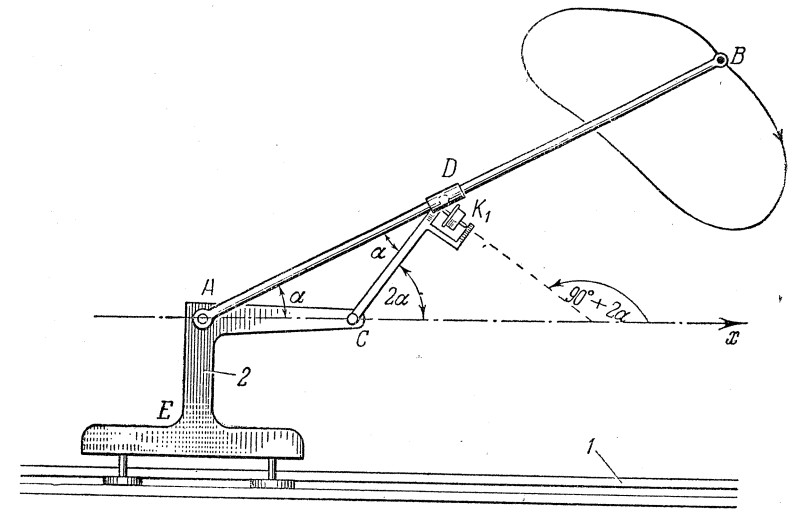


Рис. 57. Схема кулисно-кривошипного прибора для определения момента первого порядка.

1 — рельса, 2 — каретка.

рычаг EAC . В точках A и C устроены шарниры, вокруг которых могут вращаться рычаги AB и CD , причём $CD = AC$. Рычаг CD в точке D имеет шарнир с ползуном (кулиссой), движущимся вдоль рычага AB . Так как треугольник ACD равнобедренный, угол между рычагом CD и осью x равен 2α (α — угол между

рычагом AB и осью x). На оси, перпендикулярной к рычагу CD , подшипники которой жёстко скреплены с ним, находится счётное колёсико K_1 . Угол его оси с осью x равен $90^\circ + 2\alpha$.

Рассуждая так же, как и в предыдущем параграфе, мы видим, что при обводе точкой B контура площадки

$$M_x = n_1 N_1.$$

§ 28. Кулисно-кривошипный прибор для определения моментов нулевого, первого и второго порядков

Преобразуем выражение для I_x — момента второго порядка площадки относительно оси x — аналогично тому, как это было сделано в § 26 для момента первого порядка:

$$I_x = \iint y^2 dx dy = \frac{1}{3} \oint y^3 dx.$$

Если, как и в § 26, обводить площадку обводным штифтом B , находящимся на конце обводного рычага AB , точка A которого движется по оси x , то

$$I_x = \frac{1}{3} l^3 \oint \sin^3 \alpha dx$$

(в обозначениях § 26). Но

$$\sin^3 \alpha = \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha$$

и, следовательно,

$$I_x = \frac{1}{4} l^3 \oint \sin \alpha dx - \frac{1}{12} l^3 \oint \sin 3\alpha dx;$$

или, так как $l \sin \alpha = y$, получаем:

$$I_x = \frac{1}{4} l^2 \oint y dx - \frac{1}{12} l^3 \oint \sin 3\alpha dx = \frac{1}{4} l^2 M - \frac{1}{12} l^3 \oint \sin 3\alpha dx,$$

где M — площадь площадки.

Для определения интегралов

$$\oint \sin \alpha dx, \quad \oint \sin 2\alpha dx, \quad \oint \sin 3\alpha dx$$

можно построить кулисно-кривошипный механизм, аналогичный

описанному в предыдущем параграфе. К механизму, изображённому на рис. 57, нужно добавить следующие детали (рис. 58):

1) счётное колёсико K на оси, параллельной рычагу AB , подшипники которой жёстко скреплены с ним, — для определения

$$\oint \sin \alpha dx;$$

2) рычаг DG , жёстко связанный с кулиссой D и перпендикулярный¹⁾ к рычагу AB ;

3) кулисно-кривошипный механизм DGH , в котором $DG = GH$, так что треугольник DGH равнобедренный; рычаг DH жёстко связан с рычагом CD и перпендикулярен к нему;

4) счётное колёсико K_2 , ось которого перпендикулярна к рычагу GH и её подшипники жёстко скреплены с ним, — для определения $\oint \sin 3\alpha dx$.

Обозначим угол между рычагом AB и осью x через α . Тогда ось колёсика K образует с осью x угол α , ось колёсика K_1 — угол $90^\circ + 2\alpha$, ось колёсика K_2 — угол 3α .

Действительно, угол CD с осью x равен 2α как сумма двух внутренних с ним не смежных углов равнобедренного треугольника ACD . Угол оси колёсика K_1 с осью x равен, следовательно, $90^\circ + 2\alpha$. Углы при основании равнобедренного треугольника DGH такие же, как у равнобедренного треугольника ACD , так как те из них, которые имеют вершину в D — углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому рычаг GH образует с осью x угол $90^\circ + 3\alpha$, а ось колёсика K_2 — угол $90^\circ + 90^\circ + 3\alpha$, т. е. 3α .

Заменим для вывода контур площадки ступенчатым контуром. При передвижениях точки B параллельно оси x на отрезок dx точки касания ободков всех трёх колёсиков K , K_1 , K_2 будет передвигаться параллельно оси x на ту же величину dx . Рассуждая так же, как и в § 26, можно убедиться, что передвижение точки B по всем горизонтальным отрезкам вызывает поворот счётных колёсиков K , K_1 , K_2 соответственно на N , N_1 , N_2 оборотов; при этом N пропорционально $\oint \sin \alpha dx$, N_1 пропорционально

¹⁾ Рычаг DG изогнут, так что он не может быть перпендикулярен к рычагу AB . Но это несущественно, — важно, что прямая DG перпендикулярна к прямой AB .

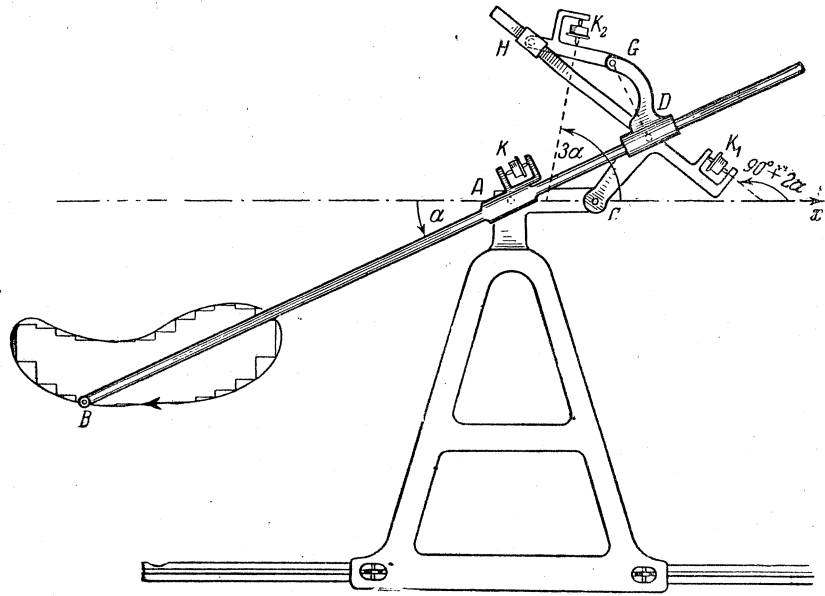


Рис. 58. Схема кулисно-кривошипного прибора для определения моментов нулевого, первого и второго порядков.

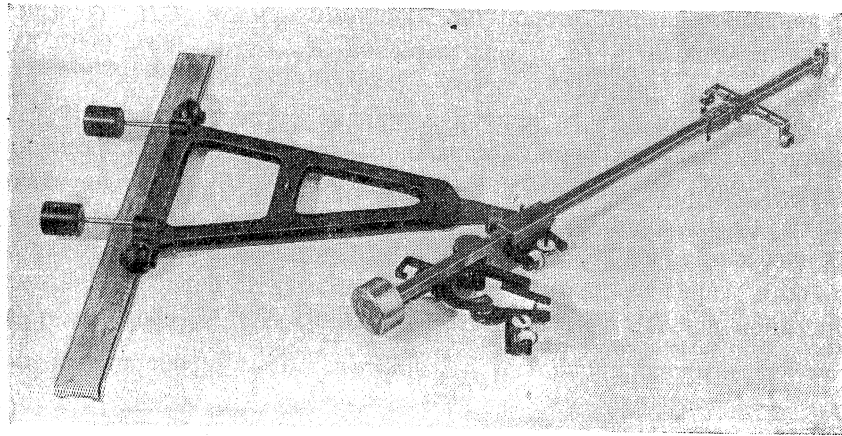


Рис. 59. Кулисно-кривошипный прибор для определения моментов нулевого, первого и второго порядков.

$\oint \sin 2\alpha dx$, N_2 пропорционально $\oint \sin 3\alpha dx$. Передвижение же точки B по всем вертикальным отрезкам даёт поворот каждого счётного колёсика, равный нулю (см. § 26).

Итак,

$$\begin{aligned} M &= \pi N, \\ M_x &= \pi_1 N_1, \\ I_x &= \frac{1}{4} l^2 \pi N - \pi_2 N_2. \end{aligned}$$

Постоянные π , π_1 , π_2 зависят от прибора и могут быть найдены обычным способом.

Описанный прибор показан на рис. 59. Колёсики расположены так, что они не мешают друг другу при работе. Рычаг DG изогнут с той же целью.

Имеются и другие обобщённые планиметры, например, позволяющие определять $\iint \sqrt{y} dx dy$, $\iint \rho dx dy$, $\iint \rho^2 dx dy$ (где ρ — полярный радиус) и т. д. Их устройство аналогично устройству рассмотренных обобщённых планиметров.

ГЛАВА V.
ИНТЕГРИМЕТРЫ

Интегриметрами называются приборы, позволяющие находить $\int_a^b f(x) dx$, не обводя всей соответствующей ему «криволинейной» трапеции (что пришлось бы делать при пользовании планиметром), а обводя только криволинейную сторону трапеции, т. е. график функции $y = f(x)$ от $x = a$ до $x = b$. Интегриметр позволяет также находить площадь любой площадки, так как эта площадь есть алгебраическая сумма площадей нескольких «криволинейных трапеций».

§ 29. Фрикционный дисковый интегриметр

Простейшим по идее интегриметром является *фрикционный дисковый интегриметр*, или, как его иногда называют, *фрикционный интегратор*. Его можно устроить (рис. 60) следующим образом.

По рельсе GH на двух колёсах A и A' катается каретка $AA'C$ параллельно оси x . В точке O каретки имеется вертикальная ось (прибор изображён на рис. 60 в плане), на которой вращается диск D . Диск этот поворачивается зацеплённым с ним под прямым углом зубчатым колесом, насаженным на ось колеса A , и потому число его оборотов зависит от величины продвижения каретки $AA'C$ вдоль оси x . В точке C каретки устроена муфта, в которой ходит стержень BK . На одном конце этого стержня имеется вертикальный штифт B , которым обводят кривую $y = f(x)$ от $x = a$ до $x = b$, а на другом — счётное колёсико K , сидящее на стержне BK , как на оси. Ободок этого счётного колёсика прижимается к пло-

скому диску D . Колёсико K отчасти катается по диску вдоль своего ободка (постольку, поскольку вращается диск) и отчасти скользит по нему поперёк своего ободка (поскольку стержень вдвигается или выдвигается из муфты C). Изменение абсциссы

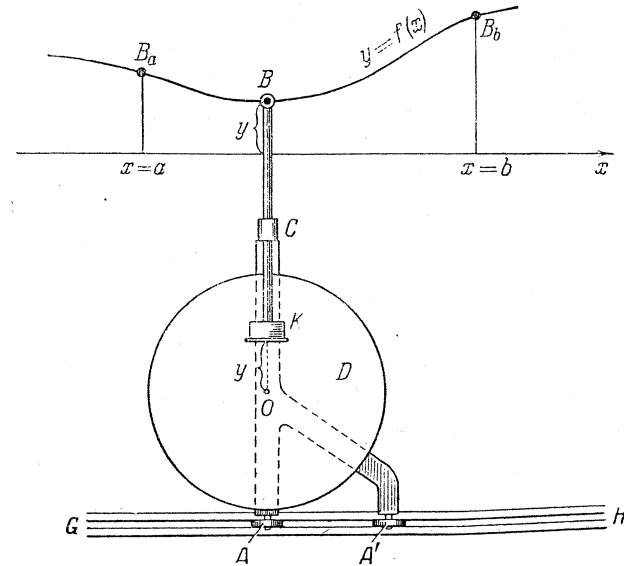


Рис. 60. Схема фрикционного дискового интегриметра.

точки B происходит за счёт катания каретки $AA'C$ по рельсе GH , а изменение её ординаты — за счёт выдвигания стержня BK из муфты C . Число N оборотов счётного колёсика K при передвижении точки B по линии $y = f(x)$ из точки B_a в точку B_b

пропорционально $\int_a^b f(x) dx$.

Действительно, число dN его оборотов при элементарном передвижении по элементу этой линии, находящемуся над данным участком dx оси x , пропорционально dx , так как угол поворота диска D при этом пропорционален dx . Одновременно dN пропорционально y (при условии, что ось x проведена так, что $y = OK$, т. е. так, что когда точка B находится на оси x , точка касания ободка колёсика K с диском D находится в центре O диска D). Пропорциональность dN и y вытекает из того, что переменный

«коэффициент передачи» от диска D к счётному колёсику K равен $\frac{y}{r}$, где r — радиус счётного колёсика. Таким образом,

$$y dx = \pi dN \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x) dx = \pi N.$$

Постоянная π зависит от прибора.

Постоянную π прибора находят аналогично тому, как это делают в обычном планиметре, измерив прибором площадь какой-нибудь заранее известной криволинейной трапеции.

Описанный прибор употребляют, например, для измерения работы, произведённой паровозом при продвижении им поезда на данном участке пути. В таком приборе x пропорционально пройденному пути, а y — силе тяги паровоза в данный момент; $\int_a^b y dx$ пропорционален искомой работе. Для того чтобы x было пропорционально пройденному пути, диск D соединяется гибким валом с зубчаткой, которая в свою очередь зацеплена с зубчаткой, насаженной на ось ведущего колеса паровоза. Аналогично, рычаг BK соединяется с пружиной прицепного крюка паровоза; поэтому y пропорционально растяжению пружины, т. е. силе тяги паровоза.

В третьей части этой книги будет рассказано о другом применении фрикционного интегратора.

§ 30. Прямолинейный интегриметр

Весьма простой по конструктивному осуществлению прямолинейный интегриметр устроен следующим образом (рис. 61). Два рычага AB и CD , из которых второй вдвое короче первого и шарнирно прикреплен к нему в середине, имеют шарниры в точках A и D . Эти шарниры сидят на ползунах, движущихся вдоль оси x . К рычагу CD жёстко прикреплен отходящий от него под прямым углом отросток, на конце которого укреплено счётное колёсико K . Его ось параллельна рычагу CD .

При передвижении точки B параллельно оси x на отрезок dx точка ободка счётного колёсика K , касающаяся бумаги, также передвигается параллельно оси x на то же расстояние dx . Колё-

сико K будет отчасти катиться и отчасти скользить по бумаге; при этом оно повернётся настолько же, как будто оно прокатилось вдоль своего ободка на расстояние $dx \sin \alpha$. Но $\sin \alpha = \frac{y}{l}$, где l — длина рычага AB ; следовательно, колёсико «прокатится»

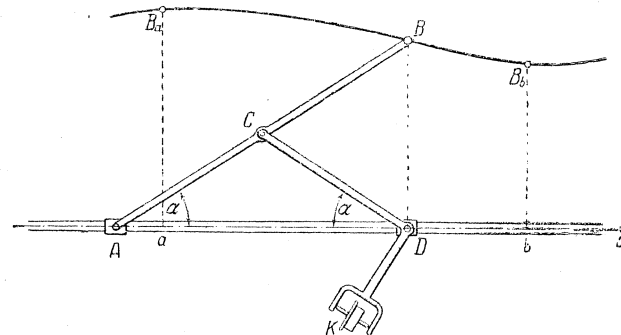


Рис. 61. Схема прямолинейного интегриметра.

на расстояние $\frac{y dx}{l}$ и $2\pi r dN = \frac{y dx}{l}$ (где dN и r имеют обычный смысл), т. е.

$$y dx = 2\pi r l dN. \quad (1)$$

При передвижении точки B параллельно оси y точка D будет оставаться на месте, и отросток, на котором укреплено счётное колёсико K , будет вращаться вокруг точки D . Счётное колёсико будет двигаться по бумаге поперёк своего ободка, т. е. не будет вращаться.

Интегрируя равенство (1), имеем:

$$\int_a^b y dx = \pi N,$$

где N — число оборотов счётного колёсика при обходе точкой B кривой $y = f(x)$ от B_a до B_b .

Постоянная $\pi = 2\pi r l$ зависит от прибора. Её определяют обычным способом.

§ 31. Гармонический анализатор Максвелла

Описываемый прибор (рис. 62) основан на втором приёме, т. е. на замене dx новым \overline{dx} . Несмотря на свою простоту, этот прибор имеет лишь теоретический интерес и не вошёл в употребление. Бумагу, на которой вычерчен график функции $y = f(x)$,

ГЛАВА VI

ГАРМОНИЧЕСКИЕ АНАЛИЗАТОРЫ

Как известно, коэффициенты a_n, b_n разложения функции $f(x)$ в промежутке от $x = -\pi$ до $x = \pi$ в ряд Фурье

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

равны для $n > 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Если задан график функции, то можно определять эти коэффициенты, обводя график в промежутке от $x = -\pi$ до $x = \pi$ обводным штифтом приборов, аналогичных планиметрам. Такие приборы называются гармоническими анализаторами. Большей частью они

основаны либо на том, что вместо интеграла $\int_{-\pi}^{\pi} y \, dx$ определяют

интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} \overline{y} \, dx$, где $y = y \cos nx$ или $y \sin nx$, либо на том, что

вместо интеграла $\int_{-\pi}^{\pi} y \, dx$ определяют интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} y \overline{dx}$, где $\overline{dx} = dx \cos nx$ или $dx \sin nx$.

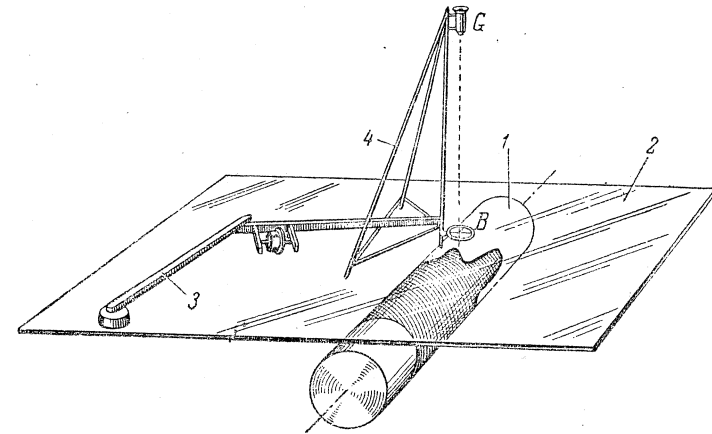


Рис. 62. Гармонический анализатор Максвелла
1—цилиндр, 2—стекло, 3—планиметр, 4—пирамидка.

обёртывают вокруг деревянного цилиндра, радиус которого равен $\frac{T}{2\pi n}$, где T — длина «периода» кривой $y = f(x)$ ¹⁾, n — номер определяемого коэффициента. При этом ось y должна быть параллельна оси цилиндра.

Над цилиндром (1), ось которого располагают горизонтально, помещают горизонтальное стекло (2). На стекло ставят лобной планиметр (3) и обводят ортогональную проекцию на плоскость стекла криволинейной ньютоновской трапеции (изогнутой по цилиндру) функции $y = f(x)$. Для этого к штифту B ²⁾, которым обводят проекцию, прикрепляют лёгкую пирамидку (4), сделанную из алюминиевых стерженьков или трубок, у вершины которой

¹⁾ Если период кривой не соответствует радиусу, кривую нужно перечерчивать.

²⁾ Его целесообразнее заменить перекрестием нитей, но мы для краткости будем употреблять слово «штифт».

имеется визирное отверстие G , расположенное так, что отрезок GB при всех движениях пирамидки по стеклу остаётся перпендикулярным к плоскости стекла.

Рис. 63 показывает, что в пределах $\frac{1}{2n}$ периода¹⁾ график $f(x)$ так деформируется, что ординаты его y остаются какими были, а все его dx изменяются по закону синуса.

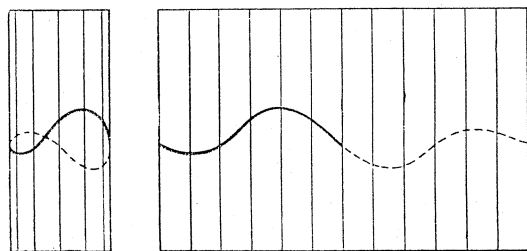


Рис. 63. Слева — проекция цилиндра с навёрнутым на него графиком на плоскость стекла, справа — развёрнутый график.

Так как цилиндр не прозрачен, и потому нельзя обвести сразу всю часть графика, соответствующую периоду, приходится бумагу, на которой начерчен график, перетягивать на $\frac{1}{2n}$ периода после каждого обвода.

При этом показания каждого нечётного обвода надо брать со своим знаком, а каждого чётного — с обратным. Для того чтобы получить коэффициенты a_n и b_n , надо брать соответствующие начальные положения графиков на цилиндре, отстоящие на $\frac{1}{4n}$ периода друг от друга.

§ 32. Гармонический анализатор Мадера

Этот гармонический анализатор (рис. 64 и 65) в настоящее время наиболее распространён. Он не требует предварительного перечерчивания линии $y = f(x)$ на данный период. На нём можно находить коэффициенты Фурье для периодов от $T = 2,5$ см до $T = 36$ см и больше, если удлинить обводной рычаг.

Схема гармонического анализатора Мадера изображена на рис. 64. Каретка G может двигаться по рельсе LM параллельно оси y . На каретке имеется шарнир A , к которому прикреплен изогнутый под прямым углом рычаг BAV' . Точкой B обводят линию $y = f(x)$, причём при изменении только ординаты точки B

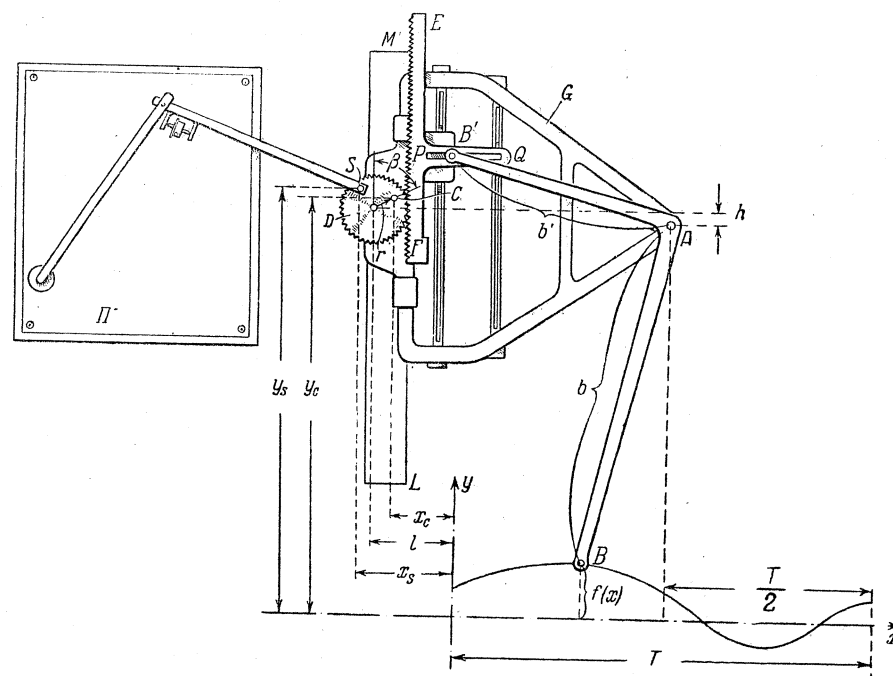


Рис. 64. Схема гармонического анализатора Мадера.

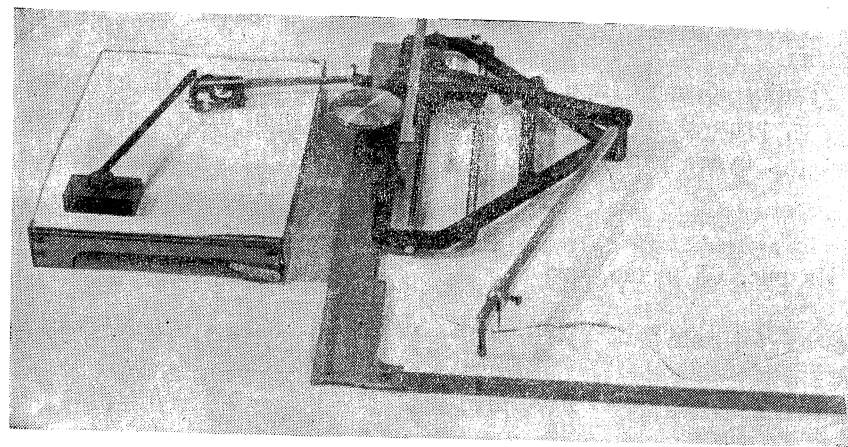


Рис. 65. Гармонический анализатор Мадера.

¹⁾ На рис. 63 $n=4$.

движется только каретка G по рельсе LM , а при изменении абсциссы точки B движется каретка и одновременно поворачивается рычаг BAB' вокруг шарнира A . В точке B' рычаг BAB' имеет палец, входящий в паз PQ отростка зубчатой планки EF , которая может передвигаться относительно каретки G параллельно оси y . Зубчатая планка EF при передвижении относительно каретки G вращает зубчатый диск D , ось которого прикреплена к каретке. В диске D имеются два конических углубления S и C , расположенных на расстоянии r от центра диска на двух радиусах, образующих между собою угол в 90° . На специальном столике Π расположен планиметр (например, обычный полярный), обводной штифт которого вставлен в углубление S или C диска D .

Когда абсцисса точки B изменяется на величину x , зубчатая планка EF сдвигается параллельно оси y относительно каретки G на величину $\frac{b'}{b}x$, где b и b' — длины плеч AB и AB' прямоугольно-изогнутого рычага BAB' .

Для каждого данного $n = 1, 2, 3, \dots$ имеется свой зубчатый диск D_n такого радиуса, что при изменении абсциссы точки B на величину T диск D_n поворачивается n раз.

В приборе можно по желанию изменять длину плеча AB так, чтобы диск D_1 при заданном периоде T поворачивался один раз. Мы предполагаем, что эта подгонка плеча к заданному T уже сделана.

Таким образом, при изменении абсциссы точки B на величину x , угол β в радианах, на который при этом повернется диск D_n , будет равен

$$\beta = n \frac{2\pi}{T} x.$$

Из рис. 65 видно, что

$$\begin{aligned} x_C &= -l + r \sin \beta; & y_C &= f(x) + \sqrt{b^2 - \left(\frac{T}{2} - x\right)^2} + h + r \cos \beta, \\ x_S &= -l - r \cos \beta; & y_S &= f(x) + \sqrt{b^2 - \left(\frac{T}{2} - x\right)^2} + h + r \sin \beta. \end{aligned}$$

Если обвести точкой B путь, состоящий из кривой $y = f(x)$ от $x = 0$ до $x = T$, отрезка ординаты $x = T$ от $y = f(x)$ до $y = 0$, отрезка оси x от $x = T$ до $x = 0$ и отрезка ординаты $x = 0$ от

$y = 0$ до $y = f(0)$, то площади I_C и I_S замкнутых путей, описанных точками C и S диска D_n (по отношению к неподвижному столику Π), будут равны:

$$I_C = \int_0^T y_C dx_C + \int_T^0 y_C dx_C, \quad I_S = \int_0^T y_S dx_S + \int_T^0 y_S dx_S.$$

по кривой по оси x по кривой по оси x

Интегралы по отрезкам ординат обращаются в нуль, так как при движении точки B по ординате диск D не вращается, а движется поступательно параллельно оси y , $x_C = \text{const}$ и $x_S = \text{const}$; следовательно,

$$dx_C = dx_S = 0.$$

Но если вести точку B по кривой и по оси x , в выражении для y_C будут различны только первые слагаемые, а именно: если вести точку B по кривой, первое слагаемое равно $f(x)$, а если вести по оси x , оно равно 0, другие же три слагаемые $\sqrt{b^2 - \left(\frac{T}{2} - x\right)^2}$, h и $r \cos \beta$ одинаковы, будем ли мы вести точку B по кривой или по оси x . Кроме того, $dx_C = r d(\sin \beta)$ $dx_S = -r d(\cos \beta)$. Поэтому мы будем иметь:

$$I_C = r \int_0^T f(x) d(\sin \beta)$$

и аналогично

$$I_S = -r \int_0^T f(x) d(\cos \beta)$$

или

$$I_C = r \int_0^T f(x) d \left[\sin \left(n \frac{2\pi}{T} x \right) \right], \quad I_S = -r \int_0^T f(x) d \left[\cos \left(n \frac{2\pi}{T} x \right) \right],$$

откуда

$$a_n = \frac{I_C}{r n \pi}, \quad b_n = \frac{I_S}{r n \pi}.$$

При имеющемся в аппарате наборе дисков D и промежуточных зубчаток, которые вставляются между зубчатой рейкой и дис-

ком D при $n > 6$, можно определять 33 пары коэффициентов Фурье $a_1, b_1, \dots, a_{33}, b_{33}$. А при помощи изменения длины рычага AB можно с тем же набором дисков D и промежуточных зубчаток определять ещё все коэффициенты до $n = 66, 99, 132$ и т. д.

При каждом вышеописанном обводе получают один из коэффициентов a_n или b_n . Для получения пары коэффициентов с другим n надо менять диск D или промежуточную зубчатку. Устраивают, однако, гармонические анализаторы и так, чтобы зубчатая планка EF могла одновременно вращать несколько дисков D разных радиусов, для чего её делают более длинной и столик Π делают во всю длину планки, для того чтобы на нём можно было поставить несколько планиметров, по одному к каждому диску.

ГЛАВА VII

ИНТЕГРАФЫ

Интеграфами называются приборы, устроенные так, что если обводить обводным штифтом B прибора график функции $y = f(x)$, то карандаш прибора автоматически вычерчивает график первообразной функции $Y = F(x) = \int f(x) dx$. Первый интеграф был построен профессором Краковского университета Абданк-Абакановичем в 1882 г.¹⁾

Принцип действия интеграфа Абданк-Абакановича основан на использовании колёсика с острым ободком.

§ 33. Интеграф с катком

На катке с двумя массивными колёсами, о котором было сказано в § 22, катается вдоль оси x рама с двумя рельсами, параллельными оси y (рис. 66, а). По одной из рельс (правой на рис. 66, а) катается каретка A'' с отрезком $A''A$; в его конце находится обводной штифт A , которым обводят график заданной функции $y = f(x)$. При этом движение точки A параллельно оси x совершается за счёт катания рамы, а движение точки A параллельно оси y — за счёт катания каретки A'' по её рельсе. На отрезке $A''A$ имеется шарнир A' с вертикальной осью, которым к отрезку прикреплен рычаг $A'B'$. На левой части рамы имеется небольшой отрезок, на котором имеется шарнир B с вертикальной осью и прикрепленной к нему короткой перекладной

¹⁾ Интересно, что сейчас же начался спор о приоритете. Поэтому Парижская академия наук создала в 1885 г. комиссию, которая разбирала это дело. Комиссия признала, что первенство в создании прибора принадлежит Абданк-Абакановичу.

с тремя роликами (на рис. 66 видно два из них), устроенными так, что они образуют ползун, в котором легко ходит рычаг $A'B'$. (На рис. 66, б изображён шарнир B и связанные с ним детали.)

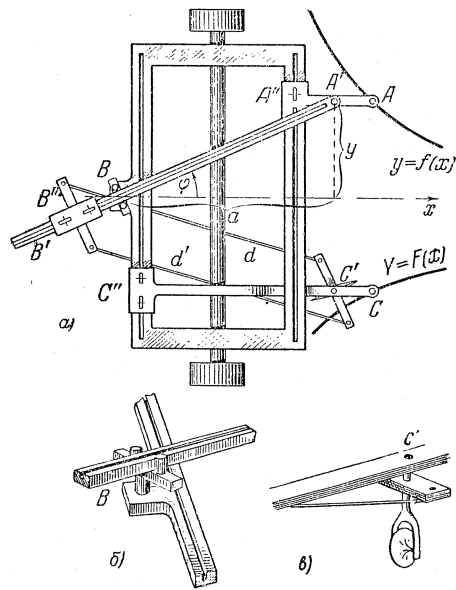


Рис. 66. Схема интегратора с катком.
а) Общая схема. б) Шарнир B и связанные с ним детали. в) Колёсико Абданк-Абакановича и связанные с ним детали.

Таким образом, этот рычаг при движениях каретки A'' по её рельсе (т. е. движениях шарнира A' параллельно этой рельсе), вдвигаясь и выдвигаясь из этого ползуна, поворачивающегося вокруг точки B , всё время проходит через точку B . Следовательно, тангенс угла φ наклона рычага $A'B'$ к оси x всегда равен $\frac{y}{a}$, где a — постоянная величина. На рычаге $A'B'$ также имеется рельса, по которой катается вторая каретка B'' . К этой каретке жёстко приделана переключина, перпендикулярная к рельсе $A'B'$. На левой части рамы имеется третья рельса, по которой катается третья каретка C'' с перпендикулярным к этой рельсе отростком $C''C$, на конце C которого укреплён карандаш C , вычерчивающий искомую интегральную кривую $Y = F(x)$. На этом же отростке имеется вертикальная ось C' с переключиной C' , совсем такой же, как и переключина B'' , причём переключины эти поддерживаются всё время в параллельном друг другу положении при помощи двух тяг d и d' , соединённых шарнирно с соответствующими концами переключин и тем самым постоянно образующих вместе с переключинами шарнирный параллелограмм.

Очевидно, что движение точки C параллельно оси x будет совершаться точно так же, как и движение точки A параллельно оси x , а именно, лишь за счёт катания всего катка вдоль оси x . Что же касается движения точки C параллельно оси y , то легко видеть,

что если бы никакого больше устройства, кроме описанных, не было, то точка C могла бы двигаться параллельно оси y произвольно. Действительно, если даже точка A неподвижна, т. е. каток и вся рама неподвижны и неподвижен рычаг $A'B'$, то можно ещё произвольно передвигать точку C параллельно оси y , причём каретка C'' будет кататься в соответствии с изменением ординаты точки C по своей рельсе, а каретка B'' будет за счёт деформации параллелограмма как-то кататься по рельсе $A'B'$. Изменение ординаты точки C или, что всё равно, точки C' (их ординаты равны), производит колёсико Абданк-Абакановича (рис. 66, в) с острым ободком, расположенное под точкой C' так, что ось его параллельна переключине C' , а ободок его, следовательно, параллелен рычагу $A'B'$. Колёсико это своим острым ободком опирается о бумагу и слегка врезается в неё, так что оно при своём передвижении по бумаге может только катиться вдоль ободка и безусловно не может скользить по ней поперёк ободка. Это самая важная часть прибора — основное, что придумал Абданк-Абаканович¹⁾. Принцип колёсика Абданк-Абакановича, таким образом, противоположен устройству счётного колёсика планиметра, которое имеет тупой ободок и может одновременно и катиться по бумаге вдоль ободка и скользить поперёк ободка. Острое колёсико Абданк-Абакановича ничего не отсчитывает — оно только заставляет ординату y точки C' изменяться так, чтобы в каждый момент передвижения этой точки касательная к её пути имела направление ободка этого колёсика, т. е. была параллельна рычагу $A'B'$. Именно за счёт лёгкого врезания в бумагу ободка колёсика Абданк-Абакановича и происходит при любом передвижении точки A такое передвижение точки C , что в каждый данный момент, т. е. для каждого данного x , тангенс угла φ наклона касательной к пути точки C , т. е. к графику $Y = F(x)$ функции $F(x)$ [т. е. производная $F'(x)$ от функции $F(x)$] равен $\frac{y}{a}$. Если a принять за единицу длины, он равен y , т. е. равен значению функции $f(x)$. Функция $F(x)$, график которой описывает точка C , есть, таким образом, перво-

¹⁾ До сих пор во всех существующих интеграторах в качестве интегрирующего механизма употребляется колёсико с острым ободком (колёсико Абданк-Абакановича). Современные интеграторы отличаются от первоначального прибора Абданк-Абакановича лишь несущественными подробностями конструкции.

образная функция, т. е. неопределённый интеграл $\int f(x) dx$ заданной функции $f(x)$, график которой мы описываем обводным штифтом A . Итак, подчёркиваем ещё раз, абсцисса x точки C изменяется так же, как абсцисса x точки A , а ордината Y точки C изменяется так, что для всякого x тангенс угла касательной к линии, описываемой точкой C , равен ординате y линии, описываемой точкой A .

§ 34. Интеграл с подвижной чертёжной доской

Этот интеграл (рис. 67) представляет собой несколько видоизменённое осуществление того же интеграла Абданк-Абакановича. Его схема изображена на рис. 68.

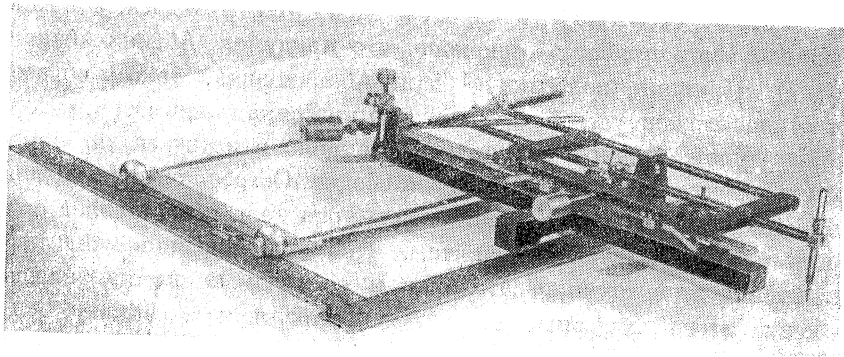


Рис 67. Интеграл с подвижной чертёжной доской.

По неподвижной рельсе s_1 , параллельной оси x , катается крестообразная рама S_1 . На ней имеется рельса s_2 , по которой параллельно оси y катается прямоугольная рама S_2 . На её отростке помещён обводной штифт A , которым обводят график заданной функции $y = f(x)$. При перемещении точки A её абсцисса изменяется за счёт движения рамы S_1 по неподвижной рельсе s_1 , а ордината — за счёт движения рамы S_2 по рельсе s_2 . На отростке рамы S_1 в точке B имеется карандаш B , описывающий график неопределённого интеграла $Y = F(x)$ функции $f(x)$ на бумаге, укрепленной на чертёжной доске S_3 , катающейся по неподвижной

рельсе s_3 параллельно оси y . Изменение абсциссы X точки B в системе XU , связанной с доской S_3 , происходит за счёт движения рамы S_1 ; следовательно, $X = x + \text{const}$, где x — абсцисса точ-

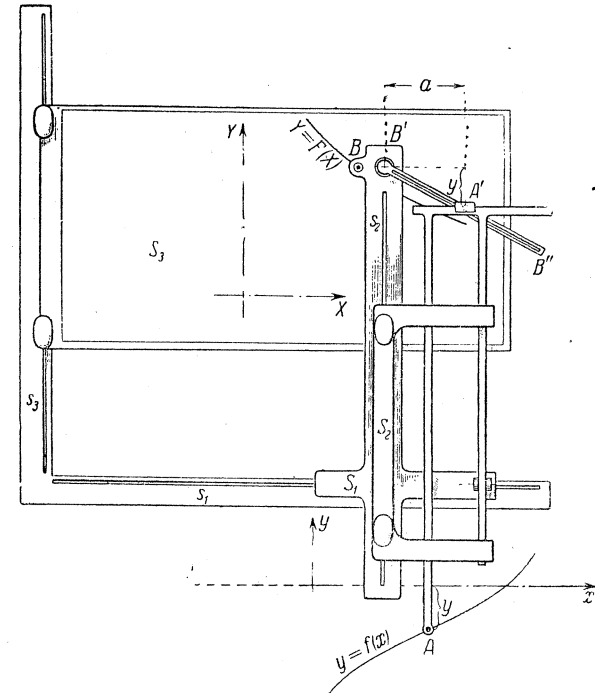


Рис. 68. Схема интеграла с подвижной чертёжной доской.

ки A в неподвижной системе xy . Выбрав надлежащим образом ось Y , мы можем считать, что $X = x$.

В точке B' рамы S_1 имеется шарнир с вертикальной осью, который связывает с рамой S_1 линейку $B'B''$ с прямолинейным профилем, в который вставлен штифт A' рамы S_2 . Тангенс угла наклона этой линейки к оси x равен, следовательно, $\frac{y}{a}$, где y — ордината той точки линии $y = f(x)$, в которой стоит в данный момент обводной штифт A , а — постоянная величина. Под точкой B' имеется колёсико Абданк-Абакановича (на рис. 68 не видно) с острым ободком, параллельным линейке $B'B''$. Это колёсико, слегка врезаясь в бумагу, прикрепленную к доске S_3 , заставляет доску S_3

так кататься по рельсе s_3 , чтобы в каждый данный момент тангенс угла наклона касательной к линии $Y = F(X)$, описываемой точкой B на доске S_3 , равнялся $\frac{y}{a}$, где y — ордината для соответствующего значения x линии $y = f(x)$. Таким образом, карандаш B вычерчивает на доске график первообразной функции $Y = F(x)$.

Для того чтобы можно было изменять длину a , штифт A' не прикреплен к отростку рамы S_2 неподвижно, а может быть передвигаем по ней параллельно оси x при помощи микрометрического винта.

Где на доске S_3 провести ось X — безразлично, так как неопределённый интеграл $Y = F(x)$ известен с точностью до произвольной постоянной.

МАШИНА ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ АНАЛИЗАТОР)

ГЛАВА VIII

КОНСТРУКЦИЯ МАШИНЫ

§ 35. Общие сведения

В настоящее время построены машины, интегрирующие с вполне достаточной для практики точностью любое обыкновенное дифференциальное уравнение, которое «не превышает мощности» данной машины; эта мощность зависит от числа основных блоков машины. В частности, с помощью такой машины интегрируются уравнения, в которых соотношение между независимым переменным x , искомой функцией y от него и её производными $\frac{dy}{dx}$,

$\frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$ написано при помощи значков элементарных функций.

Под элементарными функциями мы понимаем здесь, как всегда, целые многочлены, дробные рациональные функции, радикальные выражения, а также четыре класса элементарных трансцендентных функций — тригонометрические, круговые, показательные и логарифмы. При этом для машины совершенно безразлично, можно ли интегрировать заданное дифференциальное уравнение каким-либо из обычных известных способов, или нет. Такая машина позволяет также интегрировать системы обыкновенных дифференциальных уравнений и находить значения определённых интегралов от различных выражений, в частности, от выражений, написанных при помощи значков элементарных функций. Интеграл y дифференциального уравнения даётся машиной либо в виде графика, либо в виде таблицы, а определённый интеграл — в виде числа, отсчитываемого на специальном счётчике.

В технике, физике и вообще в практике имеют огромное значение решения дифференциальных уравнений, получаемые обычно разными приближёнными методами, требующими часто огромной вычислительной работы. Поэтому ясно всё значение машин, дающих решение с практически достаточной точностью, но весьма быстро: в течение нескольких минут или десятков минут, если машина уже включена по схеме, дающей данное дифференциальное уравнение. Составление же схемы включения машины, хотя и берёт много времени, но может быть подготовлено заранее. Так как одновременно можно готовить много разных схем и подавать их в машину по мере изготовления, в работе машины можно избежать простоев.

Первым изобретателем машины для решения дифференциальных уравнений следует считать покойного академика Алексея Николаевича Крылова, который перед первой мировой войной построил такую машину, конечно, ещё мало совершенную по сравнению с современными. Другие такие машины были построены затем у нас в Академии Наук, а также за границей — в Норвегии, США, Англии и Франции. Сейчас существуют такие машины весьма совершенных конструкций; они называются *дифференциальными анализаторами*.

Дифференциальный анализатор представляет собою весьма большой и дорого стоящий агрегат, обычно занимающий несколько больших комнат. Общий вес такого агрегата около 100 тонн; он имеет несколько тысяч электронных ламп, множество реле, около 300 километров проводов, около 150 моторов и т. д.

Мы опишем одну из наиболее совершенных существующих в настоящее время подобных машин. Она состоит из большого числа совершенно одинаковых экземпляров (например по 20—30) основных *блоков* (устройств) трёх видов, действующих на механических принципах: 1) *фрикционных дисковых интеграторов*, 2) *складывающих механизмов*, или *сумматоров* и 3) *редукторов*. Кроме основных блоков, в машине имеется несколько десятков так называемых *ведущих устройств*, осуществляющих связь между блоками, *распределительная доска*, или *пульт включения*, позволяющий соединять блоки в нужном числе и порядке, и наконец, одно или несколько так называемых *функциональных устройств*.

Мы опишем сначала конструкцию и действие основных блоков, а затем — конструкцию и действие ведущих устройств и функционального устройства. В заключение мы покажем, как, надлежащим образом соединяя основные блоки и функциональное устройство, можно решать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Заметим ещё, что в описываемой машине переменные величины представляют собой углы поворотов разных валов.

§ 36. Интегратор

Интегратор (рис. 69) есть не что иное, как фрикционный дисковый интегриметр, описанный в § 29, но сконструированный прецизионно¹⁾. Назначение этого блока состоит в том, чтобы по имеющимся переменным углам поворота u и v некоторых двух валов U и V получить вал W , переменный угол поворота которого w будет пропорционален $\int v du$. Для этого устроен горизонтальный *диск* (1) (рис. 69, а и б), насаженный на вертикальный вал U (на рис. 69 не виден). Над диском (1) по специальным рельсам слева направо и обратно движется *каретка* (2) (рис. 69, а и в), причём она передвигается при помощи так называемого *ведущего винта* (3), т. е. вращающегося вала V с нарезкой (настолько мелкой, что её не видно на рис. 69), входящей в *полугайку* (4) (рис. 69, б), связанную с кареткой. Наконец, на каретке имеется фрикционное *интегрирующее колёсико* (ролик) K (5) (рис. 69, в), насаженное на горизонтальный вал W (6), параллельный направлению движения каретки. Ролик, касаясь диска под прямым углом, отчасти катится и отчасти скользит по нему. В этом случае переменный угол w поворота вала W , как мы видели в § 29, пропорционален $\int v du$.

Дадим детальное описание конструкции интегратора для того, чтобы показать, каков характер трудностей, которые надо преодолеть, и каковы возможные способы добиться нужной точности его работы.

Весь интегратор построен прецизионно. Точность его работы зависит, конечно, от точности его изготовления и тщательного учёта многих его динамических факторов. Надо учитывать, например, скорости, ускорения,

¹⁾ Напоминаем, что *precisus* по-латински значит точный; сконструированный *прецизионно* — значит построенный особенно точно.

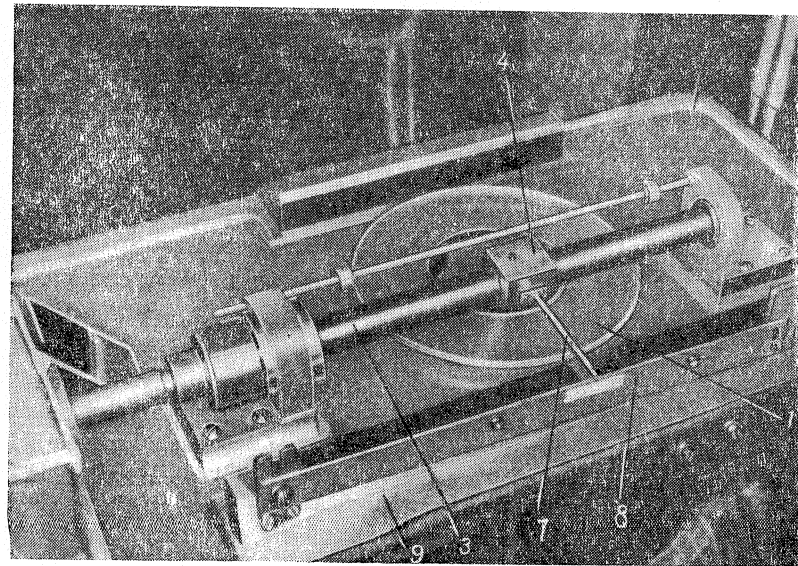
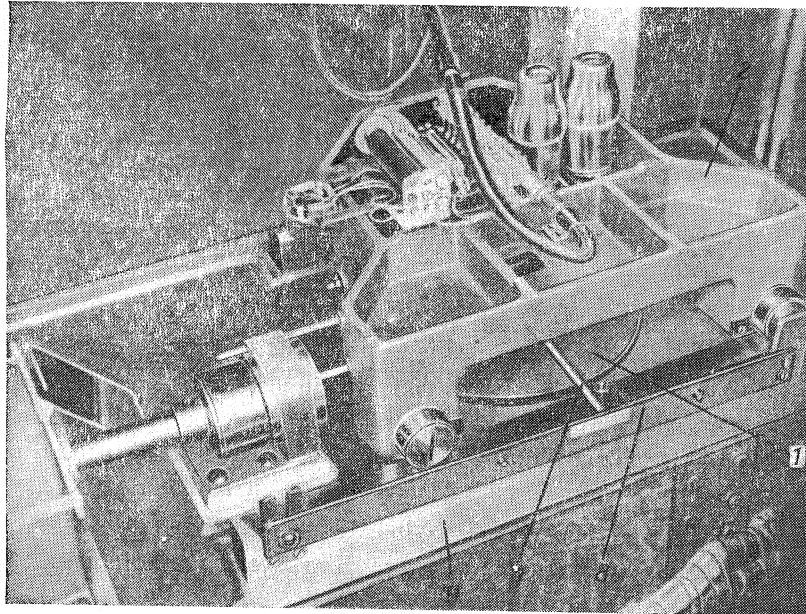


Рис. 69. Интегратор. а) Собранный интегратор. б) Каретка снята.

1—диск, 2—каретка, 3—ведущий винт (вал V), 4—полугайка, 5—ролик K, 6—вал W, 7—«хвост», 8—коррекционная линейка, 9—рама, 10—пружина.

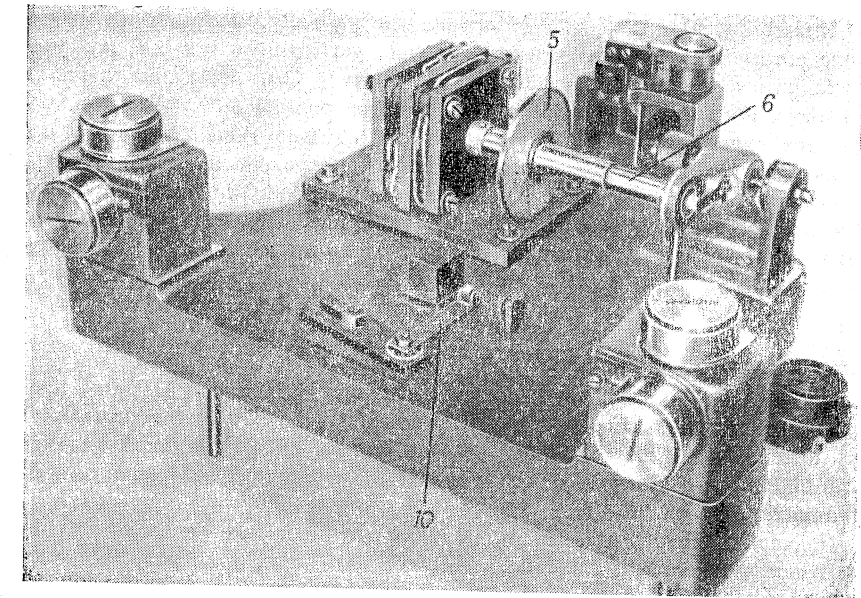


Рис. 69. в) Каретка (вид снизу).

Названия деталей см. на стр. 114.

передач от второго сервомотора. На ведущем винте сидит полугайка (4) и двигает каретку (2). К боковой поверхности этой полугайки приделан «хвост» (7) (рис. 69, а и б)—стержень, скользящий по *коррекционной линейке* (8), прикрепленной к основной *раме* (9) прибора. Профиль *коррекционной линейки* заставляет полугайку слегка поворачиваться во время её движения по винтовой нарезке вала V от одного конца линейки к другому и позволяет компенсировать небольшие неточности в шаге винта. Это устройство необходимо, так как при производстве винта постоянство его шага соблюдается только приблизительно. Особым кулачком у конца *коррекционной линейки* (на рис. 69 не показан) можно исправлять также систематические ошибки, уменьшающие точность работы.

Прецизионные шариковые подшипники используются как катки для перемещения каретки по прецизионно устроенным рельсам.

Движение полугайки передаётся каретке простым давлением без прижимающих связей. Вся рама слегка наклонена, так что каретка стремится катиться вниз, на полугайку. Пружина (10), укрепленная на каретке, давит на верхнюю часть полугайки, для того чтобы предупредить подъём полугайки от винта, а также чтобы удерживать «хвост» полугайки в соприкосновении с коррекционной линейкой.

Интегрирующее колёсико смонтировано на валу, несущем на одном конце ротор передающего указателя углов, устроенного так же, как указатели углов ведущего устройства (см. ниже § 39), но весьма легко и компактно ввиду малости вращающего момента ролика K .

Само интегрирующее колёсико (ролик) сделано весьма прочным и с весьма малым моментом инерции. Колёсико смонтировано на стальном валу, имеющем полированные концы, поддерживаемые подшипниками на камнях. Один блок подшипников укреплен на кронштейне, связанном со специальным реле, служащим для того, чтобы отводить колёсико K от диска при перемещении каретки для установки в начальное положение. Внешняя кромка ободка, представляющего в сечении трапецию с углом заострения в 60° , имеет около $\frac{1}{20}$ миллиметра в ширину. Описанное устройство интегрирующего колёсика может создавать момент его вращения в $5 \Gamma \text{ см}$ с проскальзыванием, меньшим одной десятичной. Около $4,5 \Gamma \text{ см}$ момента может быть использовано для ускорения блока колеса с максимальной величиной в 200 об/мин в секунду. Остающиеся $0,5 \Gamma \text{ см}$ идут на трение в подшипниках.

Подчёркиваем ещё раз, что мы привели это подробное описание устройства интегратора только для того, чтобы показать, как, примерно, преодолеваются встречающиеся технические трудности, и заметим, что и другие два основных блока—складывающий механизм и редуктор, а также ведущие устройства и функциональное устройство—сделаны так же прецизионно. Однако мы дадим в последующих параграфах лишь принципиальное их описание, опуская все детали.

§ 37. Складывающий механизм, или сумматор

Если имеются два вала U и V , переменные углы поворотов которых суть u и v , то складывающий механизм даёт вал W , переменный угол поворота которого w равен:

$$w = u + v.$$

Складывающий механизм (рис. 70) ничем по существу не отличается от так называемого дифференциала, имеющегося в любом

автомобиле. Устроен он так: имеются две одинаковые конические зубчатки U' и V' , жёстко насаженные на свои (отдельные друг от друга) валы U и V , составляющие один продолжение другого. Вал V зубчатки V' трубчатый, и в него вставлен вал \bar{W} , кончающийся между зубчатками U' и V' поперечной перекладкой, на концах которой свободно сидят две другие конические зубчатки \bar{W}' и \bar{W}'' (так называемые сателлиты), каждая из которых сцеплена

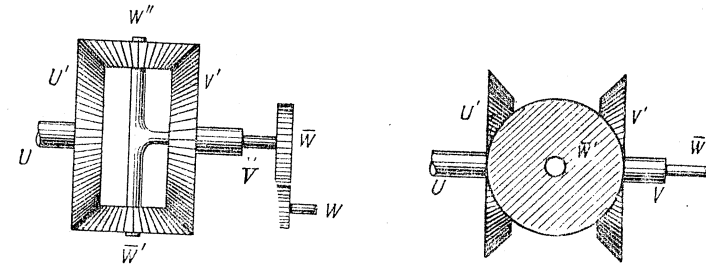


Рис. 70. Складывающий механизм.
а) и б)—виды механизма с разных сторон; на б) передача, удваивающая угол \bar{w} , не показана.

с обеими зубчатками U' и V' . Пусть u , v и \bar{w} —углы поворота валов U , V и \bar{W} . Пусть R —радиус зубчаток U' и V' . Посмотрим на весь прибор со стороны зубчатки \bar{W}' (рис. 70, б). Если элемент пути, пройденного точкой ободка зубчатки U' , есть $R du$, а элемент пути, пройденного точкой ободка зубчатки V' , есть $R dv$, то очевидно, что элемент пути центра зубчатки \bar{W}' , т. е. конца перекладки, есть $R d\bar{w} = \frac{R du + R dv}{2}$. Поэтому мы имеем $\bar{w} = \frac{u + v}{2}$.

Если при помощи передачи 1:2 удвоить угол \bar{w} , то мы получим прибор, дающий $w = u + v$.

§ 38. Редуктор

Редуктор (рис. 71) является комбинированной коробкой скоростей, позволяющей переменный угол поворота u одного вала превращать в переменный угол поворота $v = au$ другого вала, где a —заданный постоянный коэффициент. Редуктор также должен работать с большой точностью и, кроме того, он должен быть построен так, чтобы при его помощи можно было получать большой выбор коэф-

фициентов передачи α . Конечно, можно было бы для этой цели использовать прибор вроде интегратора, в котором при помощи изменения расстояния от центра диска до точки соприкосновения интегрирующего колёсика K с диском можно как угодно, даже непрерывно, изменять коэффициент передачи вращения диска

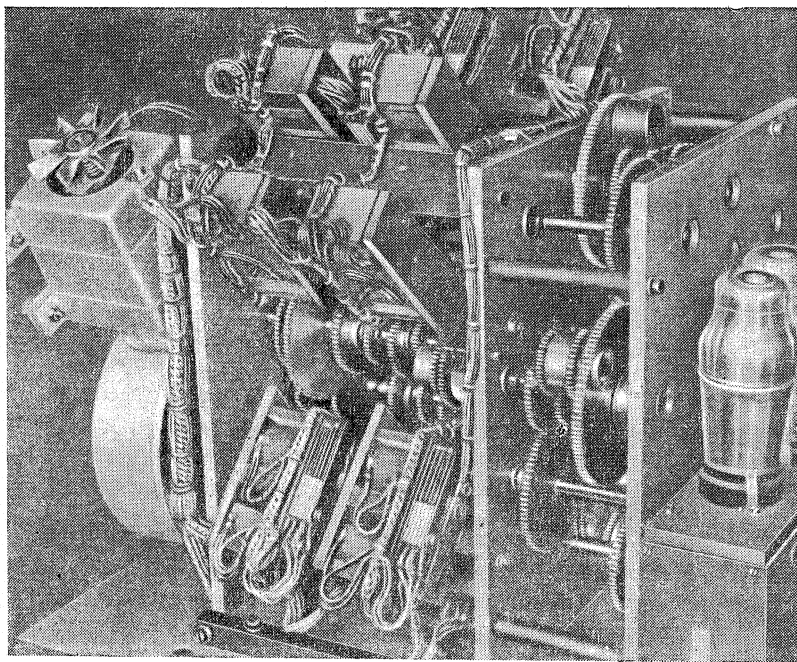


Рис. 71. Редуктор.

вращение колёсика K . Однако после испытания разных конструкций коробок скоростей всё же остановились на обычном наборе зубчатых передач, который оказался работающим более надёжно.

Прецизионный редуктор, употребляемый в дифференциальных анализаторах, устраивается, например, так. Редуктор состоит из четырёх коробок скоростей, каждая из которых даёт передаточные числа $0,1; 0,2; 0,3; \dots; 0,9$ с шагом в $0,1$. Эти четыре коробки комбинируются при помощи складывающих механизмов, устроенных так, что каждый складывающий механизм позволяет получать из углов поворота u и v угол поворота $w = u + \frac{1}{10}v$. Тогда, например,

передаточное отношение $0,3715$ устанавливается при помощи настройки коробок на передаточные отношения $0,3; 0,7; 0,1$ и $0,5$ и затем их суммирования при помощи трёх указанных складывающих механизмов в

$$0,3 + \frac{1}{10} \left[0,7 + \frac{1}{10} \left(0,1 + \frac{1}{10} 0,5 \right) \right] = 0,3715.$$

В редукторе имеется также дополнительная зубчатая передача, которая может изменять направление вращения выходного вала редуктора, т. е. придавать набранному коэффициенту α знак «+» или «-».

§ 39. Ведущее устройство

Ведущее устройство позволяет превращать вращение одного вала с переменной угловой скоростью и малым моментом во вращение другого вала с такой же переменной угловой скоростью, но с большим моментом. Такие устройства совершенно необходимы в машине для интегрирования дифференциальных уравнений, так как если даже моменты вращения валов U и V , например в интеграторе, и велики, то момент вращения вала W интегрирующего колёсика K весьма мал, потому что он вызван лишь трением, которое имеется между тонким его ободком и стеклянным диском интегратора. А трение это очень невелико. Поэтому, если надо воспользоваться, как это весьма часто бывает при различных схемах включения машины, вращением интегрирующего колёсика для того, чтобы передать его на другой вал, который трудно вращать, то приходится вращение интегрирующего колёсика передавать не прямо на этот вал, а через ведущее устройство.

После долгих и сначала мало успешных попыток было, наконец, сконструировано ведущее устройство, которое мы сейчас опишем. Оно основано на применении мостиков Уитстона для переменного тока с переменными ёмкостными сопротивлениями в одной из ветвей в виде конденсаторов, ёмкости которых изменяются в зависимости от углов поворота ведущего и ведомого валов. Два таких мостика связаны с ведущим валом и два — с ведомым следующим образом (рис. 72). Пусть A — некоторый вращающийся вал и φ_A — угол его поворота. На вал A насажены два кулачковых диска D_1 и D_2 из диэлектрика, которые при вращении вала A вращаются между пластинами

конденсаторов C_{V_1} и $C_{V_1'}$ и конденсаторов C_{V_2} и $C_{V_2'}$. Рис. 73 показывает форму пластин конденсатора и кулачков. Форма эта и расположение пластин и кулачков¹⁾ подобраны так, что выходные напряжения мостиков равны

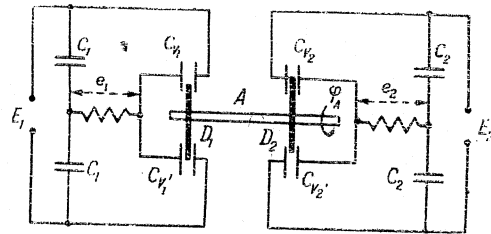


Рис. 72. Схема указателя углов.

равны

$$e_1 = k E_1 \cos \varphi_A$$

и

$$e_2 = k E_2 \sin \varphi_A,$$

где E_1 и E_2 — напряжения переменных токов высокой частоты, питающих мостики.

Расскажем подробнее, как это осуществлено. Форма кулачка определяется уравнением в полярных координатах

$$\rho = \sqrt{a - \cos \psi},$$

где $a > 1$ (рис. 74). Диэлектрическая постоянная материала кулачка — порядка сотен, в то время как для воздуха она близка к единице, и поэтому ёмкость C_{V_1} будет практически определяться тем местом пластин, между которыми находится «сектор» кулачка (аналогично для $C_{V_1'}$). Поэтому

$$\begin{aligned} C_{V_1} &= c \int_{\frac{3\pi}{4}-\varphi_A}^{\frac{5\pi}{4}-\varphi_A} \frac{\rho^2}{2} d\psi = c \int_{\frac{3\pi}{4}-\varphi_A}^{\frac{5\pi}{4}-\varphi_A} \frac{a - \cos \psi}{2} d\psi = \frac{c\pi a}{4} - c \frac{\sin \psi}{2} \Big|_{\frac{3\pi}{4}-\varphi_A}^{\frac{5\pi}{4}-\varphi_A} = \\ &= \frac{c\pi a}{4} - c \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\varphi_A\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4}-\varphi_A\right)}{2} = \frac{c\pi a}{4} - c \cos(\pi - \varphi_A) \sin \frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{c\pi a}{4} + c \sin \frac{\pi}{4} \cos \varphi_A, \end{aligned}$$

где C_{V_1} — ёмкость конденсатора C_{V_1} , c — некоторая постоянная. Аналогично

$$C_{V_1'} = \frac{c\pi a}{4} - c \sin \frac{\pi}{4} \cos \varphi_A.$$

Сопротивления конденсаторов переменному току обратно пропорциональны

¹⁾ Один из кулачков повернут на 180° по отношению к другому, чтобы при вращении вала A не было биений. Пластины конденсаторов C_{V_1} и $C_{V_1'}$ повернуты на 90° по отношению к пластинам конденсаторов C_{V_2} и $C_{V_2'}$.

их ёмкостям. Поэтому напряжение E_1 распределится на конденсаторах C_{V_1} и $C_{V_1'}$ в отношении

$$\left(\frac{c\pi a}{4} - c \sin \frac{\pi}{4} \cos \varphi_A \right) : \left(\frac{c\pi a}{4} + c \sin \frac{\pi}{4} \cos \varphi_A \right).$$

На конденсаторах же C_1 напряжение будет равно $\frac{E_1}{2}$. Отсюда и следует, что

$$e_1 = k E_1 \cos \varphi_A.$$

Аналогично,

$$e_2 = k E_2 \sin \varphi_A.$$

Такой прибор, связанный с любым вращающимся валом A , мы будем называть *указателем углов поворота вала A* , или, кратко, *указателем углов*.

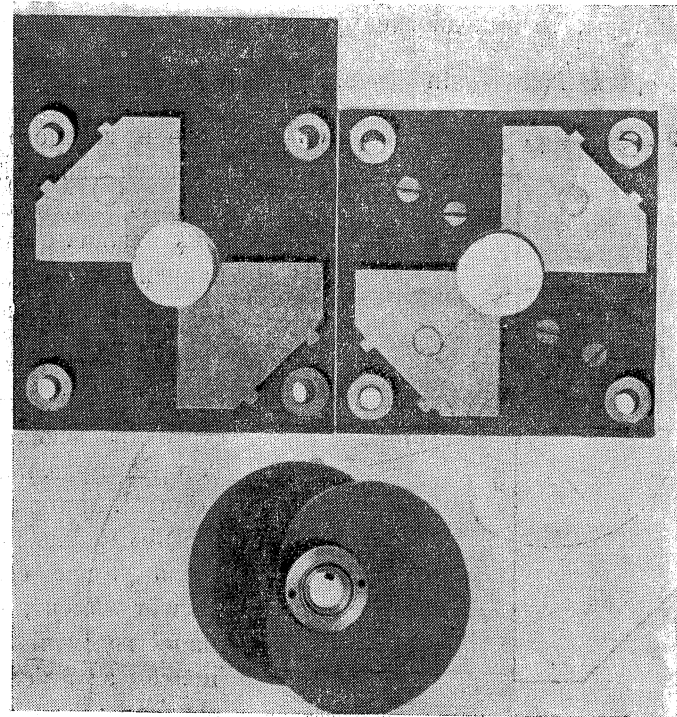


Рис. 73. Форма пластин конденсатора и кулачков.

Пусть теперь имеются два вала A и B — ведущий и ведомый, переменные углы поворотов которых φ_A и φ_B , и на каждом насажен

указатель углов, причём мостики насаженного на ведущий вал указателя $У_A$ питаются одним и тем же переменным напряжением $E (= E_1 = E_2)$, а мостики указателя углов $У_B$, насаженного на ведомый вал, питаются выходными напряжениями e_1 и e_2 первого указателя. В таком случае выходные напряжения первого указателя будут

$$e_1 = kE \cos \varphi_A \quad \text{и} \quad e_2 = kE \sin \varphi_A,$$

а у второго —

$$e_3 = ke_1 \sin \varphi_B = k^2 E \cos \varphi_A \sin \varphi_B$$

и

$$e_4 = ke_2 \cos \varphi_B = k^2 E \sin \varphi_A \cos \varphi_B.$$

Если эти напряжения вычесть, предварительно пропустив через трансформаторы, то выходное напряжение будет:

$$e = e_3 - e_4 = k^2 E (\cos \varphi_A \sin \varphi_B - \sin \varphi_A \cos \varphi_B) = k^2 E \sin (\varphi_B - \varphi_A).$$

Разность $\varepsilon = \varphi_B - \varphi_A$ углов поворотов ведущего и ведомого валов

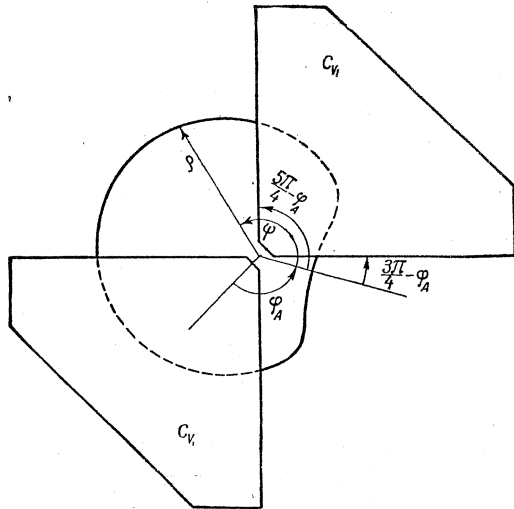


Рис. 74. Определение ёмкости конденсатора.

является ошибкой «рас- согласования» вращений этих валов. Выходное напряжение e будет, следовательно, равно

$$e = k^2 E \varepsilon.$$

Оно подаётся на вход сервоуправляющей цепи, которая управляет сервомотором. Мотор этот, который можно сделать сколь угодно сильным, создаёт момент, вращающий ведомый вал B , причём этот момент управ- ляется вращением ве- дущего вала A . Стоит

валу B хоть немного отстать или перегнать в величине угла своего поворота вал A , как образуется соответственно либо момент, под- гоняющий вал B , либо момент, его задерживающий.

Вот в принципе и всё устройство. Однако в действительности устройство сложнее, так как приходится ещё корректировать несогласованности, происходящие от ускорений, и так называемые интегральные несогласованности, накапливающиеся постепенно.

§ 40. Функциональное устройство

Для того чтобы зафиксировать функцию $y(x)$, получающуюся как решение заданного дифференциального уравнения, существуют различные функциональные устройства.

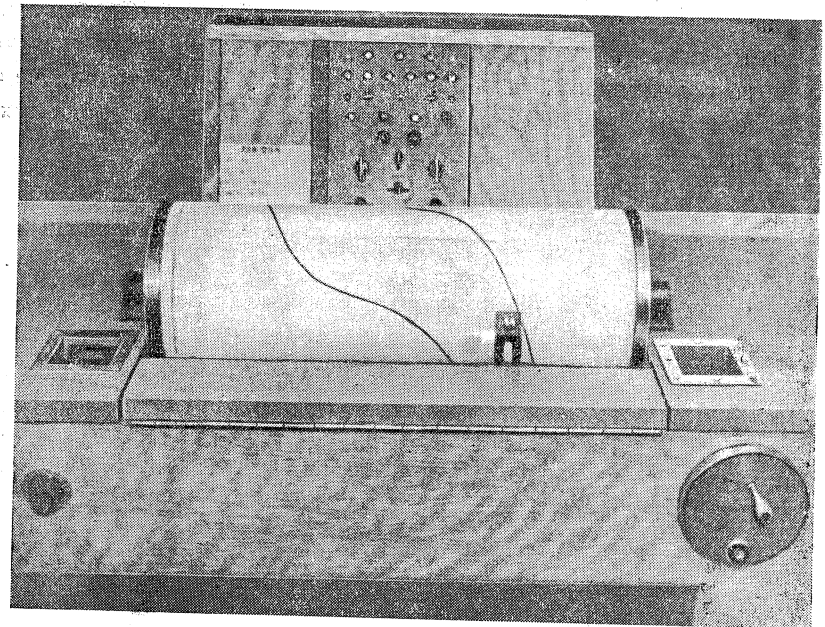


Рис. 75. Функциональное устройство.

Наиболее простое из них (рис. 75) состоит из белого барабана (длиной — около метра и диаметром около 40 см), который вращается пропорционально повороту вала x , а карандаш движется вдоль одной из образующих этого цилиндра пропорционально величине y , например при помощи винта. На поверхности барабана получается график функции $y(x)$.

Приспособив фотоэлемент, можно, наоборот, при помощи такого барабана, вращаемого пропорционально углу поворота вала x , получить другой вал y , который вращался бы пропорционально y , если на этом барабане нанесён график какой-нибудь функции $y(x)$, даже, например, функции, полученной из эксперимента. Такой функцией можно пользоваться в дифференциальном анализаторе как заданной, хотя она и не получена из x при помощи трёх основных блоков анализатора.

Были сконструированы функциональные устройства, особенно для записи решения y дифференциального уравнения, основанные и на совсем других принципах, например даже такие, которые позволяют получать функцию y прямо в виде её числовой таблицы.

Что касается задания функции при помощи функционального устройства с цилиндром, то оно, повидимому, менее точно, чем получение той же функции при помощи комбинации трёх основных блоков анализатора.

ГЛАВА IX

ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ МАШИНЫ

Мы рассмотрели отдельно назначение и устройство основных блоков машины: 1) интегратора, 2) сумматора и 3) редуктора, а также функциональное устройство и назначение и принцип действия ведущего устройства. В настоящей главе мы покажем, как надо соединять основные блоки и функциональные устройства при помощи ведущих устройств, чтобы проинтегрировать заданное дифференциальное уравнение.

§ 41. Обычное и инверсное включение интегратора

Прежде всего остановимся на двух способах подключения ведущих устройств к интегратору. На рис. 76 изображена схема интегра-

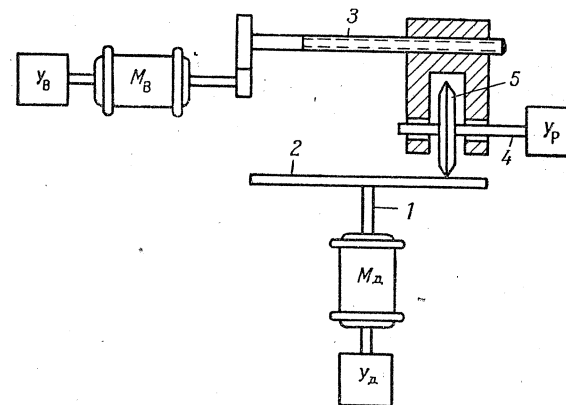


Рис. 76. Схема интегратора с указателями углов.
1—вал диска, 2—диск, 3—винт, 4—вал ролика, 5—ролик.

тора с приданными ему элементами ведущих устройств (т. е. указателями углов). На валу (1) сервомотора M_D сидит диск (2)

и указатель углов Y_d^1). Винт (3) также имеет сервомотор M_B и указатель углов Y_B . На валу (4) ролика (5) сидит только указатель углов Y_p , так как ролик (4) приводится во вращательное движение всегда от диска и никогда не бывает ведущим в интеграторе. Это обусловлено тем, что сила трения между диском и роликом недостаточна для преодоления сил инерции диска при передаче вращения от ролика к диску. На рис. 76 трансформаторы и входы сервоуправляющей цепи для простоты не показаны.

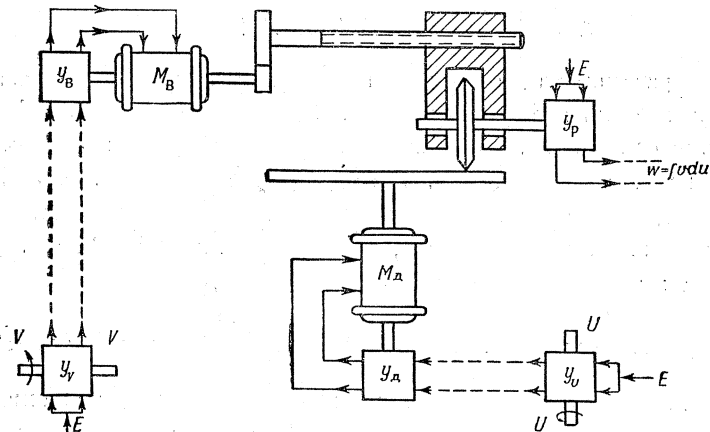


Рис. 77. Схема обычного включения интегратора.

При обычном включении интегратор, как уже было сказано, выполняет следующую операцию: если имеются два вала U и V с переменными углами поворота u и v , то интегратор осуществляет вращение третьего вала с углом поворота, пропорциональным

$$w = \int v du.$$

В этом случае (рис. 77) указатель Y_U вала U подает сигнал угла поворота u указателю вала диска Y_d . В указателе Y_d образуется угол рассогласования вала U и вала диска, который служит сигналом для вращения сервомотора M_d . Таким образом, сервомотор M_d поворачивает диск на нужный угол u . Аналогично винт поворачивается на угол v и смещает каретку с роликом на соответствующую величину относительно центра диска. Ука-

¹⁾ Индексы «д», «в», «р» соответственно означают диск, винт, ролик.

затель ролика Y_p даёт сигнал угла поворота, пропорциональный ¹⁾ $\int v du$, для передачи его другим блокам машины.

Второй важный случай включения интегратора: имеются два вала с переменными углами поворота u и v ; интегратор должен осуществить вращение третьего вала с углом поворота, равным

$$w = \int \frac{du}{v}. \quad (2)$$

Эту зависимость вообще может реализовать интегратор с ведущим роликом. Действительно, сообщим угол поворота v винту интегратора, т. е. будем смещать на величину v ролик от центра диска. Ролику зададим вращение с углом поворота u . Тогда при повороте ролика на элементарный угол du диск должен повернуться на элементарный угол dw :

$$dw = \frac{du}{v}. \quad (3)$$

Угол поворота диска w в любой момент будет $w = \int \frac{du}{v}$. Однако, как отмечалось выше, в реальном интеграторе ролик не может быть ведущим.

Здесь могут прийти на помощь ведущие устройства (рис. 78). Ролик, как и в предыдущем случае, смещается винтом на величину v . Указатель ролика Y_p воспринимает сигнал угла поворота u от указателя Y_U вала U . Угол рассогласования вала U и ролика передаётся в качестве сигнала для вращения сервомотора M_d вала диска. Таким образом, сервомотор диска, вращая диск и, следовательно, ролик, будет стремиться уничтожить угол рассогласования ролика и вала U (с углом поворота u) и тем самым заставит вращаться диск по закону (2). Указатель вала Y_d диска даёт сигнал угла поворота $w = \int \frac{du}{v}$ для передачи другим блокам машины. Такое включение интегратора называется *инверсным*. При инверсном включении интегратор в общей схеме решения какой-либо задачи представляется с кинематической точки зрения

¹⁾ В дальнейшем для краткости мы будем говорить, что угол поворота ролика равен соответствующему интегралу (в конце параграфа, где сказано о масштабе переменной величины, читатель легко проверит, что при надлежащем масштабе это справедливо).

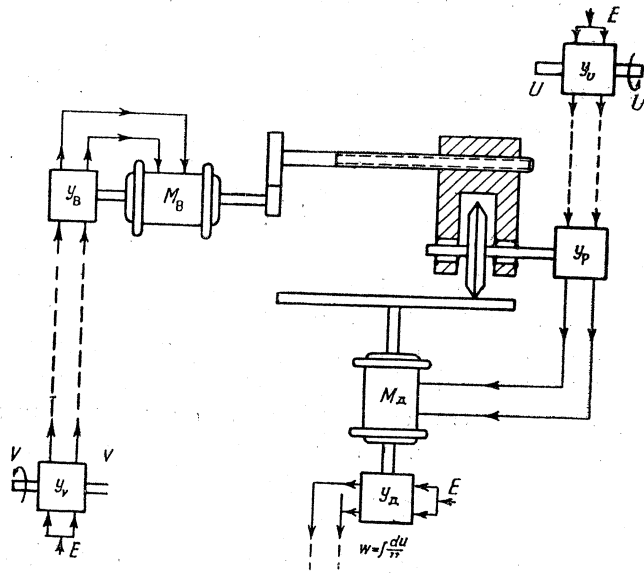


Рис. 78. Схема инверсного включения интегратора.

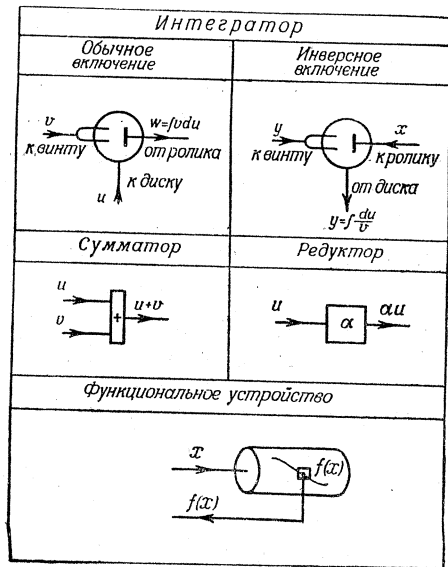


Рис. 79. Условные обозначения основных блоков машины и функционального устройства.

как бы с ведущим роликом, тогда как фактически ведущим остаётся диск.

Существуют и другие способы подключения ведущих устройств к интегратору, но останавливаться на них мы здесь не будем.

Передача вращения между различными блоками машины обычно осуществляется так, как было описано в § 39. Следует только заметить, что возможна передача сигналов от одного указателя углов к нескольким другим указателям углов, но не может быть, наоборот, передачи сигнала одному указателю углов от нескольких других.

§ 42. Решение задач на дифференциальном анализаторе

Нам придётся составлять схемы решения некоторых задач; поэтому введём условные обозначения для основных блоков машины и функционального устройства (рис. 79). Связи между различными блоками будем показывать прямыми и ломаными линиями со стрелками, указывающими направление передачи вращения от ведущего блока к ведомому. Вводить условные обозначения для ведущих устройств нет необходимости, так как стрелки на схемах вполне определяют способ включения ведущих устройств. Если на схеме изображён интегратор с ведущим роликом, то подразумевается, что он работает инверсно.

Итак, начнём с самого простого возможного случая, когда мы имеем линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами вида

$$y^{(n)} = a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y + bx, \quad (4)$$

где x — независимая переменная, y — его искомая функция; $y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ — её производные по x до n -й включительно, а $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ и b — некоторые постоянные коэффициенты.

Будем строить схему решения уравнения (4) (рис. 80). Предположим, что имеется вал с углом поворота $y^{(n)}$; передадим от него вращение винту интегратора (n), а диск интегратора соединим с валом x . Тогда ролик интегратора (n) будет вращаться с углом поворота $y^{(n-1)}$. Передадим от него вращение винту следующего интегратора ($n-1$) и аналогично получим $y^{(n-2)}$ в виде угла поворота ролика, и т. д.; наконец, на ролике интегратора (1) получается искомая функция y . Для образования $y^{(n)}$ нужно допол-

нительно от ролика каждого интегратора передать вращение редукторам с передаточными числами a_1, a_2, \dots, a_n и вал x подключить к редуктору с передаточным числом b . Выходы редукторов складываются при помощи сумматоров, и тем самым получается $y^{(n)}$, которая передается винту интегратора (n). В силу построения схемы

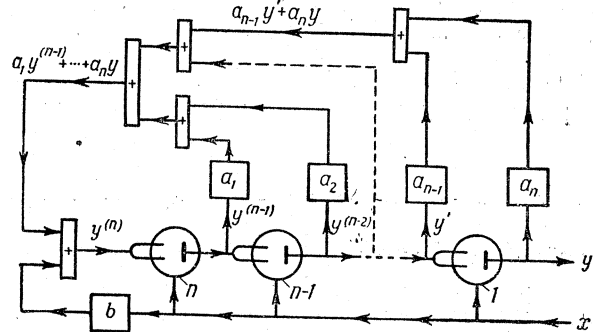


Рис. 80. Схема решения уравнения (4).

углы поворота валов $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ удовлетворяют в любой момент условию (4), т. е. y действительно является решением уравнения (4).

Покажем теперь, что, комбинируя различным образом в нужном числе три основных блока — интеграторы, сумматоры и редук-

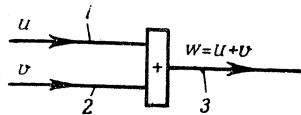


Рис. 81. Схема сложения.

торы, можно получить из вала с углом поворота x вал, угол поворота которого будет любой данной элементарной функцией от x (см. § 35).

Начнём с того, что покажем, как, имея два вала (1) и (2), переменные углы поворота которых суть u и v , получить вал (3), угол поворота которого есть $w = u + v$, или $w = u - v$, или $w = uv$, или $w = \frac{u}{v}$.

Вал $w = u + v$ получается непосредственно сумматором (рис. 81), но тогда $u = w - v$, и поэтому тем же сумматором, только взяв

за входные валы v и u валы (2) и (3), а за выходной вал $w = (1)$, получим вал с углом поворота $w = u - v$ (рис. 82). Для получения вала с углом поворота $w = uv$ заметим, что $uv = \int u dv + \int v du$.

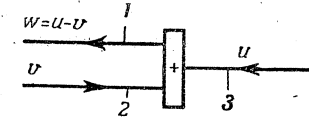


Рис. 82. Схема вычитания.

Поэтому, если соединить два интегратора и сумматор, как показано на рис. 83, то, имея валы (1) и (2) с углами поворота u и v ,

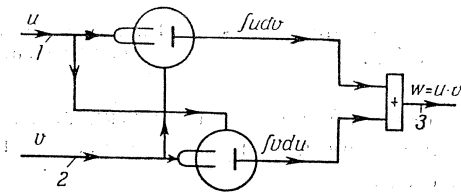


Рис. 83. Схема умножения.

мы получим вал (3) с углом поворота $w = uv$. Так как из $w = uv$ получается $u = \frac{w}{v}$, то, подавая в той же схеме на валы (2) и (3) углы поворота v и u (рис. 84), мы получим вал (1) с углом пово-

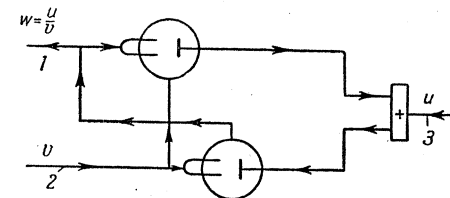


Рис. 84. Схема деления.

рота $w = \frac{u}{v}$. В последнем случае один интегратор (нижний на рис. 84) будет работать инверсно.

Рассмотрим теперь функцию $y = e^x$; тогда $\int y dx = y$. Следовательно, если в интеграторе винт и ролик заставить вращаться

с одной и той же угловой скоростью, а диск соединить с валом x , то угол поворота ролика будет e^x (рис. 85).

Обращая наименование валов, т. е. заставляя интегратор, образующий e^x , работать инверсно, получаем функцию $\ln x$ (рис. 86).

Если $y = \sin x$, то $y' = \cos x$ и $y'' = -y = -\sin x$, поэтому, соединяя два интегратора и один редуктор, как показано на

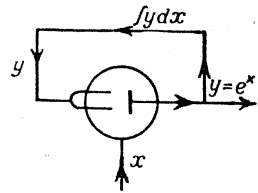


Рис. 85. Схема потенцирования.

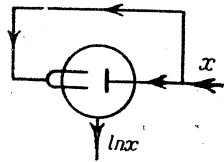


Рис. 86. Схема логарифмирования.

рис. 87, мы получаем вращение ролика интегратора (1) с углом поворота $\sin x$ и одновременно вращение ролика интегратора (2) с углом поворота $\cos x$.

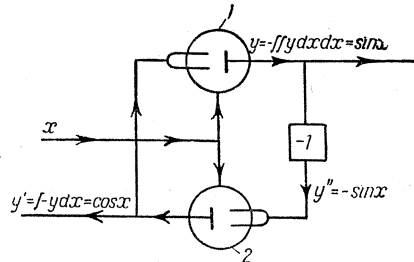


Рис. 87. Схема получения $\sin x$ и $\cos x$.

Обращая наименование валов, как показано на рис. 88, получаем функцию $\arcsin x$.

Покажем, как осуществить $y = x^n$, где n — любой действительный показатель. Потенцируя, имеем $y = e^{n \ln x}$. Мы видели, как можно из вала с углом поворота x получить вал с углом поворота $\ln x$. Если, далее, при помощи редуктора получить вал с углом поворота $n \ln x$ ¹⁾, то, как указывалось выше, можно получить

¹⁾ Фактически в машине редуктор не может точно воспроизвести любое действительное число n , а приближает его при помощи десятичной дроби.

и вал с углом поворота $e^{n \ln x} = x^n$. Комбинируя же образованные степени редукторами (т. е. помножая на постоянные коэффициенты) и сумматорами и применяя, если нужно, схему деления $\frac{u}{v}$, мы можем, очевидно, получить любую целую рациональную или дробно-рациональную функцию от x , а также аналогичным способом — любое радикальное выражение от x .

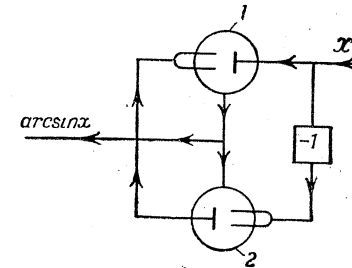


Рис. 88. Схема получения $\arcsin x$.

Для образования функции $y = \arcsin x$ заметим, что $y = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Как мы видели сейчас, беря вал с углом поворота x , мы можем получить вал с углом поворота $\frac{1}{1+x^2}$, и тогда при помощи ещё одного интегратора — вал с углом поворота $y = \arcsin x$. Обращая в этой схеме включения входного и выходного валов x и y , мы можем получить функцию $y = \arcsin x$. Аналогично образуются функции $\arcsin x$, $\arcsin x$ и $\arcsin x$.

Итак, соединив надлежащим образом ряд основных блоков машины друг с другом, мы можем, имея вал с некоторым переменным углом поворота x , получить вал, угол поворота которого был бы любой элементарной функцией или любой комбинацией элементарных функций от x . Следует отметить, что приведённые способы образования элементарных функций не единственны.

Пусть теперь в заданном дифференциальном уравнении переменные $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ связаны между собою знаками элементарных функций. Имея валы с углами поворота $y^{(n)}$ и x , путём применения последовательно соединённых интеграторов, мы получим валы с углами поворота $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y'$ и y . Со-

единия эти валы при помощи выше рассмотренных схем, соответствующих тем элементарным функциям, при помощи которых связаны между собой x , y , y' , ..., $y^{(n-1)}$ и $y^{(n)}$, мы получаем связь между x , y , y' , ..., $y^{(n-1)}$ и $y^{(n)}$, налагаемую на них дифферен-

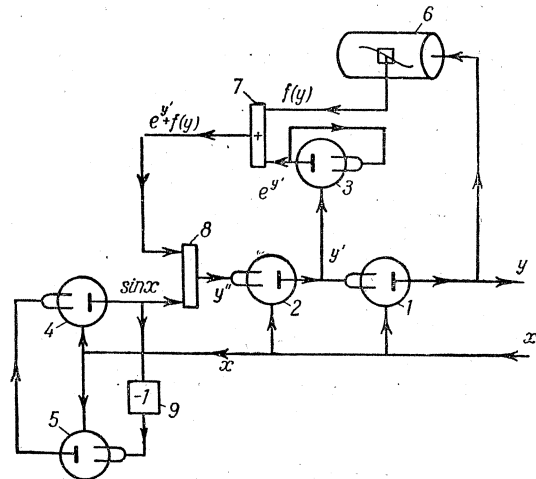


Рис. 89. Схема решения уравнения $y'' = e^{y'} + f(y) + \sin x$.

циальным уравнением, и тем самым решаем наше дифференциальное уравнение.

В качестве примера приведём схему решения дифференциального уравнения

$$y'' = e^{y'} + f(y) + \sin x,$$

где $f(y)$ — функция, заданная графически.

Схема решения этого уравнения изображена на рис. 89. На винт интегратора (2) поступает y'' . В результате интегрирования по x в интеграторах (2) и (1) образуются y' и y ; y' подаётся также в интегратор (3) для образования $e^{y'}$, а y подаётся на функциональное устройство (6) для образования $f(y)$. Затем углы поворота $e^{y'}$ и $f(y)$ складываются в сумматоре (7). При помощи интеграторов (4) и (5) и редуктора (9) образуется $\sin x$, который в сумматоре (8) складывается с результатом на выходе сумматора (7). На выходе сумматора (8) мы, очевидно, получаем вторую производную y'' , которая и подаётся на винт интегратора (2).

Если дифференциальное уравнение решается на машине, то всегда можно подобрать сколько угодно различных схем, дающих решение этого уравнения. Вопрос о наиболее выгодной в том или ином отношении схеме, как, например, в отношении числа используемых блоков, точности решения, времени решения и др., является важной задачей.

Большое значение имеет правильный выбор масштабов переменных величин. *Масштабом переменной величины* называется число поворотов вала, приходящееся на единицу изменения переменной величины. Известно, что с увеличением масштабов повышается точность работы машины, однако увеличивается время решения. На выбор масштабов переменных величин, поступающих на винты интеграторов, накладываются конструктивные ограничения, обусловленные ограниченным ходом каретки и ролика, но большое число масштабов находится в нашем распоряжении.

Редактор *Р. Д. Бачелис*
Техн. редакторы:
Р. А. Негримова и *С. Н. Ахламов*
Корректор *Г. Н. Нелидова*

Подписано в печати 17/IX 1951 г.
Бумага 60×92. 4,25 бум. л. 8,5 печ. л.
7,13 уч.-изд. л. 33 440 тип. зн. в печ. л.
Цена книги в переплёте 4 р. 50 к. Тираж
10 000 экз. Т-07236. Заказ № 1252.

16-я типография Главполиграфиздата
при Совете Министров СССР.
Москва, Трёхпрудный пер., 9.